

数 学 問 題

注 意

1. この問題用紙は 8 ページまであります。
2. あなたの受験番号は解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号が正しいかどうか、受験票と照らし合わせて確認しなさい。
3. 解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔Ⅰ〕については解答を解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
5. 問題〔Ⅱ〕は解答用紙のおもてに、問題〔Ⅲ〕は解答用紙の裏に解答しなさい。
6. 問題〔Ⅳ〕は A, B 2 題が出題されています。このうち 1 題を選択して解答しなさい。2 題とも解答した場合は、両方無効となります。解答は解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
7. 1 問につき 2 つ以上マークしないこと。2 つ以上マークした場合には、その解答は無効になります。
8. 解答は、必ず HB の黒鉛筆を使用して記入しなさい。
9. 訂正は、消しゴムできれいに消し、消しクズを紙面に残さないようにしなさい。
10. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
11. 解答用紙は、必ず提出しなさい。
12. この試験時間は 90 分です。

※ この問題用紙は必ず持ち帰ること。

〔Ⅰ〕 次の(1)～(3)の各問の空欄に該当するものを解答群から1つ選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。

- (1) $4 \leq a \leq 9$, $4 \leq b \leq 9$ をみたす整数 a, b に対して $b^3 - a$ と $b^3 + a^4 - a^2$ の最大公約数が5であるならば, $a = b = 5$ であるか, または $a =$ ア, $b =$ イ である。

ア, イの解答群

- | | | |
|-----|-----|-----|
| ① 4 | ② 5 | ③ 6 |
| ④ 7 | ⑤ 8 | ⑥ 9 |

- (2) n は自然数とする。関数 $f_n(x) = \frac{n(x-1)}{x^{n+1}}$ ($x \geq 1$) の最大値 a_n は ウ で, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ エ である。

ウの解答群

- | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| ① $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$ | ② $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1}$ | ③ $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$ |
| ④ $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ | ⑤ $\frac{n(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}}$ | ⑥ $\frac{n(n+2)^n}{(n+1)^{n+1}}$ |

エの解答群

- | | | |
|-----|-------------------|-----------------|
| ① 0 | ② $\frac{1}{e^2}$ | ③ $\frac{1}{e}$ |
| ④ 1 | ⑤ e | ⑥ ∞ |

(3) n は自然数, a, b は定数で, $0 < b < 2\pi$ とする。このとき

$$\sum_{k=0}^n \cos(a + kb) = \frac{1}{\sin \frac{b}{2}} \sum_{k=0}^n \cos(a + kb) \sin \frac{b}{2}$$
$$= \frac{\boxed{\text{オ}}}{\sin \frac{b}{2}}$$

が成り立つ。

オの解答群

① $\sin \frac{(n+1)b}{2} \cos(a + \frac{n}{2}b)$

② $\cos \frac{(n+1)b}{2} \sin(a + \frac{n}{2}b)$

③ $\cos \frac{(n+1)b}{2} \cos(a + \frac{n}{2}b)$

④ $\sin(n+1)b \cos(2a + nb)$

⑤ $\cos(n+1)b \sin(2a + nb)$

⑥ $\cos(n+1)b \cos(2a + nb)$

[II] $A^2 = A$ が成り立つような行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$ がある。行列

$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ は $AX = XA$ をみたすとして、次の各問に答えよ。

(1) y, z を x, w, a を用いて表せ。

(2) $X \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$, $X \begin{pmatrix} -1 \\ b \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} -1 \\ b \end{pmatrix}$ となる数 p, q を, x, w を用いて表せ。

(3) 行列 $X - (q - p)A - pE$ を計算せよ。ただし $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(4) $AX = XA$ のほかにさらに $X^2 = X$ をみたす行列 X をすべて求めよ。

〔Ⅲ〕 $f(x) = (\log x)^2$ ($x > 0$) とする。ただし、 $\log x$ は x の自然対数とする。

(1) 関数 $f(x)$ の増減と、曲線 $C: y = f(x)$ の凹凸を調べて、 C の概形を解答用紙の指定された場所に描け。

(2) $\int_1^e f(x) dx$ を求めよ。ただし、 e は自然対数の底とする。

(3) C 上の点 $(e, 1)$ における C の接線を ℓ とする。 ℓ と x 軸と C で囲まれる図形の面積を求めよ。

〔Ⅳ〕 次の問題 A, B のいずれか 1 題のみを選択して解答せよ。2 題とも解答した場合は両方無効になる。

〔A〕 下の文のア～カの空欄に該当するものを解答群から 1 つ選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。

実数 x, y に対して、行列 $A = \begin{pmatrix} y & \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} & 1-y \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないなら

ば、 x と y の間には ア という関係がある。点 (x, y) がこの関係をみたしながら座標平面上を動いて描く曲線は、焦点の座標が $(-\text{イ}, \text{ウ})$ と $(\text{イ}, \text{ウ})$ で、長軸の長さが エ、短軸の長さが オ の楕円である。また、 $x+y$ の最大値は カ である。

アの解答群

① $\frac{1}{4}x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$

② $x^2 + \frac{1}{4}\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$

③ $x^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$

④ $4x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$

⑤ $\frac{1}{4}x^2 + (y-1)^2 = 1$

⑥ $x^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2 = 1$

⑦ $4x^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$

⑧ $\frac{1}{4}x^2 - (y-1)^2 = 1$

イ、ウ、エ、オの解答群

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

⑥ $\sqrt{3}$

⑦ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

⑧ $\sqrt{5}$

力の解答群

$$\textcircled{1} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{5\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{7} \quad \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{8} \quad \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}$$

〔B〕 下の(1)～(4)の空欄に該当するものを解答群から1つ選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。

次のような確率分布に従う確率変数 W がある。

W の値 w	a_1	a_2		a_n
$P(W=w)$	p_1	p_2		p_n

確率変数 W の期待値 $E(W)$ と分散 $V(W)$ は

$$E(W) = \sum_{i=1}^n a_i p_i$$

$$V(W) = \sum_{i=1}^n (a_i - m)^2 p_i \quad \text{ただし } m = E(W)$$

である。 W と同じ確率分布に従い、互いに独立な確率変数 X , Y , Z を考える。

このとき次の等式が成り立つ。

$$E(X+Y+Z) = \boxed{\quad (1) \quad}$$

$$E(X^2+Y^2+Z^2) = \boxed{\quad (2) \quad}$$

$$E(XY+YZ+ZX) = \boxed{\quad (3) \quad}$$

$$\begin{aligned} & E\left(\left(X - \frac{X+Y+Z}{3}\right)^2 + \left(Y - \frac{X+Y+Z}{3}\right)^2 + \left(Z - \frac{X+Y+Z}{3}\right)^2\right) \\ &= \boxed{\quad (4) \quad} \end{aligned}$$

(1), (2), (3), (4)の解答群

① $2E(W)$

② $2E(W)^2$

③ $2V(W)$

④ $3E(W)$

⑤ $3E(W)^2$

⑥ $3V(W)$

⑦ $6E(W)$

⑧ $6E(W)^2$

⑨ $6V(W)$

⑩ $3(V(W) + E(W)^2)$

⑪ $3(V(W) - E(W)^2)$

⑫ $3(V(W) + 2E(W)^2)$

⑬ $3(V(W) - 2E(W)^2)$

⑭ 0