

数 学 問 題

注 意

1. この問題用紙は 10 ページまであります。
2. あなたの受験番号は解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号が正しいかどうか、受験票と照らし合わせて確認しなさい。
3. 解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔Ⅰ〕については解答を解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
5. 問題〔Ⅱ〕は解答用紙のおもてに、問題〔Ⅲ〕は解答用紙の裏に解答しなさい。
6. 問題〔Ⅳ〕は(A)、(B) 2 題が出題されています。このうち 1 題を選択して解答しなさい。2 題とも解答した場合は、両方無効となります。解答は解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
7. 1 問につき 2 つ以上マークしないこと。2 つ以上マークした場合には、その解答は無効になります。
8. 解答は、必ず H B の黒鉛筆を使用して記入しなさい。
9. 訂正は、消しゴムできれいに消し、消しクズを紙面に残さないようにしなさい。
10. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
11. 解答用紙は、必ず提出しなさい。
12. この試験時間は 90 分です。

※ この問題用紙は必ず持ち帰ること。

〔Ⅰ〕 次の(1)～(3)の各問の空欄に該当するものを解答群から1つ選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。

(1) 定数 a, b に対して

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 - bx^3}{\tan x - \sin x} = 1$$

が成り立つならば $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。

ア、イの解答群

① -2 ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ 0

⑥ $\frac{1}{4}$ ⑦ $\frac{1}{2}$ ⑧ 1 ⑨ 2 ⑩ 3

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ について

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とすると $a_n = \boxed{\text{ウ}}$, $b_n = \boxed{\text{エ}}$ である。

ウ、エの解答群

① 1 ② 3^n ③ $\frac{3^n - 1}{2}$

④ $\frac{3^n + 1}{2}$ ⑤ $2^n - 1$ ⑥ 2^n

⑦ $3 \cdot 2^{n-1} - 2$ ⑧ $3 \cdot 2^{n-1} - 1$ ⑨ $2^{2n-2} + 1$

⑩ 2^{2n-2}

$$(3) \int_0^{\frac{2}{3}} \cos^3 \frac{\pi x}{2} dx = \boxed{\text{オ}}.$$

オの解答群

$$\textcircled{1} \quad \frac{4}{3\pi}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{5\sqrt{2}}{6\pi}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{11}{12\pi}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{1}{32\pi}$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{2}{3}$$

$$\textcircled{7} \quad \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\textcircled{8} \quad \frac{5\sqrt{2}}{12}$$

$$\textcircled{9} \quad \frac{11}{24}$$

$$\textcircled{10} \quad \frac{1}{64}$$

〔Ⅱ〕 a は 1 より大きい定数とする。関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_x^{ax} t^3 e^{-t} dt$$

とおく。次の問に答えよ。

(1) $x > 0$ のとき $f(x) > 0$ であることを示せ。

(2) $x > 0$ のとき $x^3 e^{-x} \leq \frac{C}{x^2}$ であることを示せ。ただし、 $C = \left(\frac{5}{e}\right)^3$ とする。

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ を示せ。

(4) $x \geq 0$ の範囲で $f(x)$ を最大にする x の値と最小にする x の値を求めよ。

〔Ⅲ〕 x と y は正の整数で、 $2x^2 = y^2 + 1$ を満たすとする。次の問に答えよ。

(1) y は奇数であることを示せ。

(2) $y = 2n + 1$ としたとき、 n が 4 の倍数であるかまたは $n + 1$ が 4 の倍数であることを示せ。

(3) $1 \leq x \leq 50$, $1 \leq y \leq 50$ の範囲にある整数 x , y の組で $2x^2 = y^2 + 1$ を満たすものをすべて求めよ。

〔IV〕 次の問題(A), (B)のいずれか1題のみを選択して解答せよ。2題とも解答した場合は両方無効になる。

(A) 下の文の(1)~(3)の空欄に該当するものを解答群から1つ選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。

複素数平面上で0と1を表す点をそれぞれO, Aとする。複素数平面上の点B, C, D, Eは次の3つの条件を満たすとする。

条件1 B, C, D, Eは実軸上になく、DとBは実軸をはさんで反対側にある。

条件2 四角形OACBと四角形ODEAは平行四辺形である。

条件3 $\triangle OAC$ と $\triangle ODA$ は相似である。

点B, C, D, Eが表す複素数をそれぞれ u, v, w, z とする。次の問に答えよ。

1. w を v の式で表すと $w = \boxed{(1)}$ である。
2. z を u の式で表すと $z = \boxed{(2)}$ である。
3. 点Bが点 $1 + \frac{i}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円周上(ただし実軸上の点を除く)を動くとき、点Eの軌跡は $\boxed{(3)}$ である。

(1)の解答群

- | | | | |
|----------------------------|-----------------|------------------|-------------------|
| ① $\frac{v}{ v ^2}$ | ② $\frac{1}{v}$ | ③ $\frac{1}{v}$ | ④ $\frac{v}{ v }$ |
| ⑤ $\frac{\overline{v}}{v}$ | ⑥ $-v$ | ⑦ $\overline{v}$ | ⑧ $v + v$ |

(2)の解答群

- | | | | |
|-------------------------|-------------------------|---------------------|---------------------|
| ① $\frac{u+1}{ u+1 ^2}$ | ② $\frac{u}{ u ^2} - 2$ | ③ $\frac{u+1}{u-1}$ | ④ $\frac{u-2}{u-1}$ |
| ⑤ $\frac{u+1}{ u +1}$ | ⑥ $\frac{u}{u-1} - 2$ | ⑦ $-u$ | ⑧ $u-2$ |

(3)の解答群

- ① 点 $-\frac{i}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円周(ただし実軸上の点を除く)
- ② 点 $-1 - \frac{i}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円周(ただし実軸上の点を除く)
- ③ 点 $1 - \frac{i}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円周(ただし実軸上の点を除く)
- ④ 点 $-i$ を中心とする半径 1 の円周(ただし実軸上の点を除く)
- ⑤ 点 $1 - i$ を中心とする半径 1 の円周(ただし実軸上の点を除く)
- ⑥ 点 $1 + i$ を中心とする半径 1 の円周(ただし実軸上の点を除く)
- ⑦ 点 $-\frac{i}{2}$ を通り実軸に平行な直線
- ⑧ 点 i を通り実軸に平行な直線

(B) 下のア～キの空欄に該当するものを解答群から1つ選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。

空間の点 $P(1, 1, 1)$ を中心とし半径1の球面を S とする。3点 $A(u, 0, 0)$, $B(0, u, 0)$, $C(0, 0, u)$ ($u > 0$) を通る平面を α とする。

(1) P を通り α に垂直な直線と α との交点の座標は

(, ,)

である。

(2) S と α が少なくとも1点を共有するための必要十分条件は

$$\sqrt{\text{エ}} \leq u \leq \sqrt{\text{オ}} + \sqrt{\text{カ}}$$

である。

(3) 点 A' の座標を $(v, 0, 0)$ とする ($0 < v < u$)。点 B' を直線 AB 上に、点 C' を直線 AC 上にとり、3点 A' , B' , C' が yz 平面と平行な同一平面上にあるようにする。直線 $B'C'$ が球面 S と異なる2点 D , E で交わるとき、線分 DE の長さが最大になる u , v の値は

$$u = \text{カ}, v = \text{キ}$$

である。

ア、イ、ウの解答群

① $\frac{u}{\sqrt{2}}$

② $\frac{u}{\sqrt{3}}$

③ $\frac{u}{2}$

④ $\frac{u}{3}$

⑤ $\frac{u-1}{2}$

⑥ $\frac{u-1}{3}$

⑦ $\frac{\sqrt{u}}{2}$

⑧ $\frac{\sqrt{u}-1}{3}$

⑨ $\sqrt{\frac{u}{2}}$

⑩ $\sqrt{\frac{u}{3}}$

エ、オの解答群

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| ① 1 | ② 2 | ③ 3 | ④ 4 | ⑤ 5 |
| ⑥ 6 | ⑦ 7 | ⑧ 8 | ⑨ 9 | ⑩ 0 |

カ、キの解答群

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| ① 1 | ② $\frac{3}{2}$ | ③ 2 |
| ④ 3 | ⑤ $\sqrt{3}$ | ⑥ $2\sqrt{3}$ |
| ⑦ $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ | ⑧ $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ | ⑨ $\frac{\sqrt{3}}{3}-1$ |
| ⑩ $\frac{\sqrt{3}+1}{3}$ | | |