

数 学 問 題

注 意

1. この問題冊子は9ページあります。
2. あなたの受験番号は解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と、受験票の受験番号が一致していることを確認しなさい。
3. 解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔Ⅰ〕については解答を解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
5. 問題〔Ⅱ〕は解答用紙のおもてに、問題〔Ⅲ〕は解答用紙の裏に解答しなさい。
6. 問題〔Ⅳ〕については解答を解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
7. 1問につき2つ以上マークしないこと。2つ以上マークした場合には、その解答は無効になります。
8. 解答は、必ずH、FまたはHBの黒鉛筆を使用して記入しなさい。
9. 訂正は、消しゴムできれいに消し、消しクズを紙面に残さないようにしなさい。
10. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
11. 解答用紙は、必ず提出しなさい。
12. 試験時間は90分です。

※ この問題冊子は必ず持ち帰ること。

〔Ⅰ〕 次の(1)～(4)の各問の空欄に該当するものを解答群から1つ選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。

(1) 実数 a と h ($h \neq 0$) に対して次の等式が成り立つ。

$$\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \frac{\cos h - 1}{h} \cdot \boxed{\text{ア}} + \frac{\sin h}{h} \cdot \boxed{\text{イ}}。$$

ここで、

$$\frac{1 - \cos h}{h} = \frac{1}{\boxed{\text{ウ}}} \cdot \frac{\sin^2 h}{h}$$

と変形できる。また、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \boxed{\text{エ}}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sin h = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \cos h = 1$$

であるから

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} \\ = \boxed{\text{オ}} \cdot \boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{エ}} \cdot \boxed{\text{イ}} = \boxed{\text{カ}} \end{aligned}$$

である。

ア、イ、ウ、エ、オ、カの解答群

① -1

② 0

③ 1

④ $\sin a$

⑤ $\cos a$

⑥ $\sin h$

⑦ $\cos h$

⑧ $1 + \cos h$

⑨ $1 - \cos h$

⑩ $\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)$

(2) $a > 0$ とする。放物線 $y = a(x^2 - 1)$ と直線 $y = 1$ で囲まれる図形の面積は キ であり、その面積を最小にする a の値は ク 。

キの解答群

① $\frac{2}{3} \sqrt{\frac{(a+1)^3}{a}}$

③ $\frac{4}{3} \sqrt{\frac{(a+1)^3}{a}}$

⑤ $\frac{2}{3} \sqrt{\frac{(a+1)^3}{a^3}}$

⑦ $\frac{4}{3} \sqrt{\frac{(a+1)^3}{a^3}}$

⑨ $\frac{2}{3} \sqrt{a(a+1)^3}$

② $\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{a(a+1)^3}}$

④ $\frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{a(a+1)^3}}$

⑥ $\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{a^3(a+1)^3}}$

⑧ $\frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{a^3(a+1)^3}}$

⑩ $\frac{2}{3} \sqrt{\frac{a}{(a+1)^3}}$

クの解答群

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{3}{4}$

⑥ 1

⑦ $\frac{3}{2}$

⑧ 2

⑨ 3

⑩ 4

(3) 大中小の3個のさいころを振って、出た目をそれぞれ a, b, c とする。こ

のとき行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列が存在する確率は ケ である。

ケの解答群

- | | | | | |
|-------------------|-------------------|---------------------|-------------------|-------------------|
| ① $\frac{19}{24}$ | ② $\frac{5}{6}$ | ③ $\frac{103}{120}$ | ④ $\frac{31}{36}$ | ⑤ $\frac{7}{8}$ |
| ⑥ $\frac{9}{10}$ | ⑦ $\frac{11}{12}$ | ⑧ $\frac{199}{216}$ | ⑨ $\frac{67}{72}$ | ⑩ $\frac{17}{18}$ |

(4) 実数 x, y に関する次の条件の否定は コ である。

$$y \geq 0 \text{ かつ } x^2 + y^2 \leq 1$$

コの解答群

- ① 「 $y \leq 0$ 」または「 $x^2 + y^2 \geq 1$ 」
- ② 「 $y \leq 0$ 」または「 $y > 0$ かつ $x^2 + y^2 > 1$ 」
- ③ 「 $y < 0$ 」または「 $y > 0$ かつ $x^2 + y^2 > 1$ 」
- ④ 「 $y < 0$ 」または「 $y \geq 0$ かつ $x^2 + y^2 > 1$ 」
- ⑤ 「 $y < 0$ 」または「 $y > 0$ かつ $x^2 + y^2 \geq 1$ 」
- ⑥ 「 $y < 0$ 」または「 $y \geq 0$ かつ $x^2 + y^2 \geq 1$ 」
- ⑦ 「 $x^2 + y^2 > 1$ 」または「 $y < 0$ かつ $x^2 + y^2 < 1$ 」
- ⑧ 「 $x^2 + y^2 > 1$ 」または「 $y \leq 0$ かつ $x^2 + y^2 < 1$ 」
- ⑨ 「 $x^2 + y^2 > 1$ 」または「 $y \leq 0$ かつ $x^2 + y^2 \leq 1$ 」
- ⑩ 「 $x^2 + y^2 > 1$ 」または「 $y > 0$ かつ $x^2 + y^2 \leq 1$ 」

〔Ⅱ〕 $f(x) = xe^{-x}$ とおくとき以下の間に答えよ。

(1) $f'(x)$, $f''(x)$ を求め, $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。

(2) y 軸上の点 $(0, b)$ から曲線 $y = f(x)$ に引ける接線の本数を求めよ。

ただし, n を自然数とするとき, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0$ であることを用いてもよい。

〔Ⅲ〕 xyz 空間の点 $A(0, 1, 1)$ を中心とする半径 1 の球がある。点 $B(0, 0, 3)$ に光源を置いてこの球の xy 平面における影を考えよう。 xy 平面上に点 $P(x, y, 0)$ をとる。

以下の問に答えよ。

(1) 線分 BP を $t : 1 - t$ に分ける点を Q とする。線分 AQ の長さを最小にする t を求めよ。また、 AQ の長さの最小値を求めよ。

(2) 直線 BP が球に接するための条件は

$$4x^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$$

の形に書ける。 a, b, c, d を求めよ。

(3) 球の影は xy 平面上の楕円で囲まれる図形である。その楕円の中心の座標、および長軸、短軸の長さを求めよ。

〔IV〕 次の文章のア～オの空欄に該当するものを解答群から1つ選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。

4つの複素数 $z, \bar{z}, w, \bar{w}$ は複素数平面上の中心1、半径1の円周上にあり、長方形の頂点となっているとする。この長方形の面積が最大となるとき、その面積は ア であり、

$$\begin{aligned}(x-z)(x-\bar{z})(x-w)(x-\bar{w}) \\ = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d\end{aligned}$$

とおくと、 $a =$ イ $, b =$ ウ $, c =$ エ $, d =$ オである。ただし $\bar{z}, \bar{w}$ は z, w の共役複素数である。

アの解答群

- | | | | |
|------------------------|-----------------|------------------------|-----|
| ① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ | ② $\frac{1}{2}$ | ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | ④ 1 |
| ⑤ $\sqrt{2}$ | ⑥ 2 | ⑦ 4 | ⑧ 8 |

イ、ウ、エ、オの解答群

- | | | | |
|------|------|------|-----|
| ① -6 | ② -4 | ③ -2 | ④ 0 |
| ⑤ 2 | ⑥ 4 | ⑦ 6 | ⑧ 8 |