

〔 I 〕 次の各問の  に入る数字を下の表から選んでアルファベットをマークせよ。同じアルファベットを選んでもかまわない。

1.  $x > 0$  のとき,  $\log_4 x^2 + 3 \log_x 16 = 7$  を満たす  $x$  は,  $x =$   (1)

または,  $x =$   (2) である。

2. 関数  $f(x) = 27^x - 6 \cdot 9^x + 9 \cdot 3^x$  は,  $x =$   (3) のときに、  
最小値  (4) をとる。

3. 文字列 abcd に対して、文字列の内のふたつの文字を入れ換える操作を繰り返して新しい文字列をつくと全部で  (5) 個の文字列が得られる。

また  (5) 個の文字列をすべてつくるのに必要な、ふたつの文字の入れ換えは、もっとも少なく選べば  (6) 種類だけでよい。

- |                |                |       |       |       |       |
|----------------|----------------|-------|-------|-------|-------|
| A. 0           | B. -1          | C. 1  | D. -2 | E. 2  | F. -3 |
| G. 3           | H. -4          | I. 4  | J. 6  | K. 7  | L. 8  |
| M. 10          | N. 12          | O. 14 | P. 16 | Q. 18 | R. 20 |
| S. 22          | T. 24          | U. 26 | V. 30 | W. 32 | X. 36 |
| Y. $2\sqrt{5}$ | Z. $5\sqrt{3}$ |       |       |       |       |

〔Ⅱ〕 集合  $X$  のふたつの要素の間に成り立つ関係  $R$  を考える。集合  $X$  のどのふたつの要素  $x, y \in X$  についても関係  $R$  は成立しているか、あるいは成立していないかのいずれかである。 $x$  と  $y$  の間に関係  $R$  が成立しているときは、 $xRy$  とかき、成立していないときは、 $x\overline{R}y$  とかく。関係  $R$  が次の(i), (ii), (iii)の性質をすべて満たしているとき  $R$  を性質 E を持つ関係と呼ぶ。

(性質 E)すべての  $X$  の要素  $x, y, z$  に対して、(i)  $xRx$ , (ii)  $xRy$  ならば  $yRx$ , (iii)  $xRy$  かつ  $yRz$  ならば  $xRz$ 。

例えば、 $X$  を整数全体の集合とし、 $X$  の要素  $m, n \in X$  について、 $m = n$  のとき、 $mRn$  として  $X$  上の関係  $R$  を定める。このとき、すべての  $X$  の要素  $l, m, n$  について(i)  $m = m$ , (ii)  $m = n$  ならば、 $n = m$ , (iii)  $m = n$  かつ  $n = l$  ならば、 $m = l$  であるから、この関係  $R$  は性質 E を満たす。

次の問いに答えよ。

1. 次の(1)から(6)で定める集合  $X$  の上の関係  $R$  についてそれぞれ性質 E を持つかどうか判定せよ。性質 E を持つ場合は解答欄の T をマークし、性質 E を持たない場合は解答欄の F をマークせよ。

(1)  $X$  を整数全体の集合とし、 $m, n \in X$  について、 $m \neq n$  のとき  $mRn$  として  $X$  上の関係  $R$  を定める。

(2)  $X$  を整数全体の集合とし、 $m, n \in X$  について、 $m > n$  のとき  $mRn$  として  $X$  上の関係  $R$  を定める。

(3)  $X$  を整数全体の集合とし、 $m, n \in X$  について、 $m - n$  が 5 の倍数のとき  $mRn$  として  $X$  上の関係  $R$  を定める。

(4)  $X$  を次数が 3 次以下で実数係数の  $t$  についての多項式全体の集合とする。すべての要素  $f(t), g(t) \in X$  について、 $f(\sqrt{7}) - g(\sqrt{7}) = 0$  となるときに  $f(t)Rg(t)$  とし、 $X$  上の関係  $R$  を定める。

(5)  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  のすべての部分集合からなる集合を  $X$  とし、 $A, B \in X$  について、 $A \cap B \neq \phi$  のとき  $ARB$  として  $X$  上の関係  $R$  を定める。

(6)  $X$  を平面上のベクトル全体の集合として、すべてのベクトル  $\vec{x}, \vec{y} \in X$  について、 $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$  のとき  $\vec{x}R\vec{y}$  として  $X$  上の関係  $R$  を定める。

2. 集合  $X$  上で定まる性質  $E$  を持つ関係  $R$  と,  $X$  の要素  $a$  について

$Y_a = \{x \in X \mid xRa\}$  とおく。このとき, 次が成り立つ事を示せ。

(1)  $a$  は,  $Y_a$  の要素である。

(2)  $aRb$  であるための必要十分条件は,  $Y_a = Y_b$  である。

(3)  $a\bar{R}b$  であるための必要十分条件は,  $Y_a \cap Y_b = \phi$  である。

〔Ⅲ〕  $a$  を実数とし、 $z$  を 0 でない複素数で

$$z^3 + (2\sqrt{2} - 1)az^2\bar{z} + (1 - 2\sqrt{2}a^2 + a^4)z\bar{z}^2 - a(1 + a^4)\bar{z}^3 = 0$$

を満たすとする。ここで、 $\bar{z}$  は  $z$  に共役な複素数である。

1.  $z$  が実数のとき、 $a$  を求めよ。
2.  $z$  が純虚数のとき、 $a$  を求めよ。
3.  $z$  が実数でも純虚数でもないとき、 $z$  の範囲を複素数平面上で図示せよ。