

〔Ⅰ〕 次の(1)から(3)までの各問の空欄に該当するものを解答群の中から選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。

- (1) 複素数平面上に原点を中心とする半径1の円 O_1 と、原点を中心とする半径2の円 O_2 がある。点 $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ における O_1 の接線が O_2 と交わる点を $\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)\alpha$ (ただし、 α は複素数、 i は虚数単位)と表すとき、
 $\alpha = \boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}}i$ または $\alpha = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}i$ である。

アの解答群

- ① -2 ② $-\sqrt{2}$ ③ -1 ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{3}$
 ⑥ $\frac{1}{3}$ ⑦ $\frac{1}{2}$ ⑧ 1 ⑨ $\sqrt{2}$ ⑩ 2

イの解答群

- ① 1 ② 2 ③ $\sqrt{2}$ ④ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ⑤ $\sqrt{3}$
 ⑥ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⑦ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑧ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ⑨ $\sqrt{6}$ ⑩ $\frac{1}{\sqrt{6}}$

- (2) 13個の項からなる数列 $x_0, x_1, \dots, x_{12}$ で次の(a), (b), (c)を満たすものは全部で $\boxed{\text{ウ}}$ 通りある。
 (a) $x_0 = 0, x_{12} = 0$
 (b) 各 $j = 0, 1, \dots, 12$ に対し x_j は整数
 (c) 各 $j = 0, 1, \dots, 11$ に対し $|x_{j+1} - x_j| = 1$

ウの解答群

- ① 2 ② 2^6 ③ 2^{11} ④ 2^{12} ⑤ ${}_{11}C_2$
 ⑥ ${}_{11}C_6$ ⑦ ${}_{12}C_2$ ⑧ ${}_{12}C_6$ ⑨ ${}_{13}C_2$ ⑩ ${}_{13}C_6$

$$(3) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{\sin x} dx = \frac{\boxed{\text{工}}}{3} + \frac{\boxed{\text{オ}}}{3} \sqrt{2}$$

である。

工，オの解答群

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| ① - 5 | ② - 4 | ③ - 3 | ④ - 2 | ⑤ - 1 |
| ⑥ 1 | ⑦ 2 | ⑧ 3 | ⑨ 4 | ⑩ 5 |

〔Ⅱ〕 負でない実数 a, b, c, d を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は逆行列を持たないとし、かつ 2 以上のある自然数 n に対して $A^n = A$ が成り立つとする。次の問に答えよ。

- (1) 2 以上の任意の自然数 k に対して、 $A^k = (a + d)^{k-1} A$ が成り立つことを示せ。
- (2) 2 以上の任意の自然数 k に対して、 $A^k = A$ が成り立つことを示せ。
- (3) $0 < a < 1$, $b = c$ である場合に、 A を a を用いて表せ。

〔Ⅲ〕 (1) $x > 0$ で定義された関数

$$f(x) = -x^2 + 6x + \frac{4}{x}$$

の極大値と極小値を求め、 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし、 $f(x) = 0$ となる x の値を求める必要はない。

(2) 3つの相異なる正の実数 a, b, c は $a + b + c = 6$, $abc = 4$ を満たすとし、 $k = bc + ca + ab$ とおく。

① a, b, c を解とする3次方程式を求めよ。

② k のとりうる値の範囲を求めよ。

〔Ⅳ〕 次の文章のアからキまでの空欄に該当するものを解答群の中から選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。

空間内の4点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(a, b, 0)$, $C(c, d, e)$ (ただし, $b > 0$, $e > 0$) は正四面体の頂点とする。

(1) $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$, $c = \boxed{\text{ウ}}$, $d = \boxed{\text{エ}}$, $e = \boxed{\text{オ}}$ である。

(2) 正四面体 $OABC$ に外接する球の中心 P の座標は $(c, d, \boxed{\text{カ}})$ である。

(3) 正四面体 $OABC$ に内接する球と四面体 $POAB$ との共通部分の体積は $\boxed{\text{キ}}$ である。

ア, イ, ウ, エ, オ, カの解答群

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{6}$
 ⑥ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ⑦ $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ⑧ $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ⑨ $\frac{\sqrt{6}}{9}$ ⑩ $\frac{\sqrt{6}}{12}$

キの解答群

① $\frac{\sqrt{3}}{27}\pi$ ② $\frac{\sqrt{3}}{162}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{216}\pi$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{288}\pi$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{324}\pi$
 ⑥ $\frac{2\sqrt{6}}{27}\pi$ ⑦ $\frac{\sqrt{6}}{108}\pi$ ⑧ $\frac{\sqrt{6}}{216}\pi$ ⑨ $\frac{2\sqrt{6}}{729}\pi$ ⑩ $\frac{\sqrt{6}}{864}\pi$