

〔I〕

- (1) Y (2) S (3) F
(4) J (5) A (6) M

〔II〕

1. F 2. T 3. T
4. F 5. T 6. T

〔III〕

$2 \sin 2\theta$ が自然数となるとき

$$\sin 2\theta = \frac{1}{2}, 1$$

1. $60^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$ より $120^\circ \leq 2\theta \leq 540^\circ$

$$\sin 2\theta = \frac{1}{2}$$

となるのは、 $2\theta = 150^\circ, 390^\circ, 510^\circ$

$$\therefore \theta = 75^\circ, 195^\circ, 255^\circ$$

$\sin 2\theta = 1$ となるのは $2\theta = 450^\circ$

$$\therefore \theta = 225^\circ$$

よって $N(60, 270) = 4$

2. $2a^\circ \leq 2\theta \leq 360^\circ$ に

$$\sin 2\theta = \frac{1}{2}, 1$$

となる θ が 3 個ということ。

よって、 $-210^\circ < 2a^\circ \leq 30^\circ$

$$\therefore -105 < a \leq 15 \quad \cdots (\text{答})$$

3. $0^\circ \leq 2\theta \leq 2t^\circ$

- (i) $t < 15$ のとき

$0^\circ \leq 2\theta < 30^\circ$ より

$$\sin 2\theta = \frac{1}{2}, 1 \text{ となる } \theta \text{ なし}$$

$$N(0, t) = 0$$

- (ii) $15 \leq t < 45$ のとき

$0^\circ \leq 2\theta < 90^\circ$ より

$$\sin 2\theta = \frac{1}{2} \text{ となる } \theta \text{ が 1 個}$$

$$N(0, t) = 1$$

- (iii) $45 \leq t < 75$ のとき

$0^\circ \leq 2\theta < 150^\circ$ より

$$\sin 2\theta = \frac{1}{2}, \sin 2\theta = 1$$

となる θ が各 1 個

$$N(0, t) = 2$$

- (iv) $75 \leq t \leq 180$ のとき

$0^\circ \leq 2\theta \leq 360^\circ$ より

$$\sin 2\theta = \frac{1}{2} \text{ となる } \theta \text{ が 2 個}$$

$\sin 2\theta = 1$ となる θ が 1 個

$$N(0, t) = 3$$

以上より

$$\int_0^{180} N(0, t) dt = \int_0^{15} 0 dt + \int_{15}^{45} 1 dt + \int_{45}^{75} 2 dt + \int_{75}^{180} 3 dt$$

$$= 0 + [t]_{15}^{45} + [2t]_{45}^{75} + [3t]_{75}^{180}$$

$$= 30 + 60 + 315 = 405 \quad \cdots (\text{答})$$

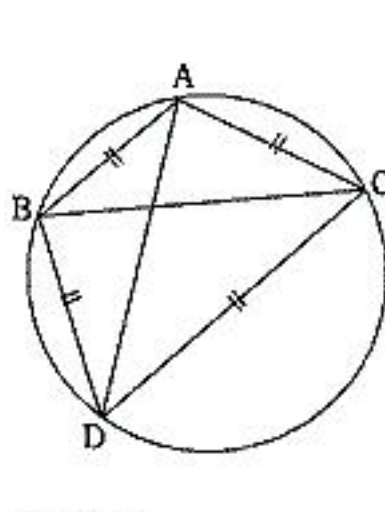
〔IV〕

どの 3 点を取っても二等辺三角形ができるので、となり合う 2 辺が等辺となる二等辺三角形が少なくとも 1 つある。

その頂点を A, B, C ($AB = AC$) とすると $\triangle BCD$ が二等辺三角形なのは、

- (i) $BA = BD$ のとき、

- (ii) $AD = BD$ のときがあり、



- (i) のとき、

$\triangle BCD, \triangle ACD$ も二等辺三角形

このとき

- (ア) $BD = CD$ とすると、 $AC = DC$ となり

$\triangle ABCD$ は、四辺とも等しい四角形
つまりひし形で円に内接するから、

正方形。

- (イ) $BC = DC$ とすると

- ① $BC = DC = BD$ だと、

$\triangle ABC$ も正三角形となり、

同一円内に同じ頂点 (C) をもつ

2 つの異なる正三角形 $\triangle ABC$ と

$\triangle BCD$ ができることになり矛盾。

よって $BC = DC \neq BD$

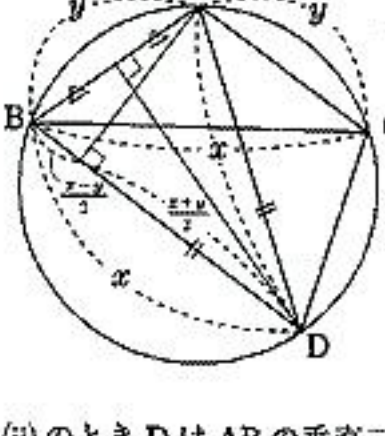
このとき $AC \neq DC$ より

$\triangle ADC$ は、 $AD = CD$ の二等辺三角形

$BD = AC$ より $\angle BAD = \angle ADC$ (1 つの円内で同じ長さの弦 (弧) に対する円周角は等しい)

よって $AB \parallel CD$

このとき $\square ABCD$ は等脚台形



- (ii) のとき D は AB の垂直二等分線上

$\triangle ACD$ も二等辺三角形だが

$AD = CD$ とすると D は AC の垂直二等分線上だが、AB, AC の垂直二等分線の交点は円の中心なので、このようなことはありえない。

よって $AC = DC$ これは (i) の (イ) のときと同じである。

以上より、

四角形の形は正方形か等脚台形

正方形のとき対角線 x なら

$$\text{一辺は (全て同じで)} \frac{x}{\sqrt{2}}$$

等脚台形のとき図より三平方の定理から、

$$y^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = x^2 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

$$\therefore y^2 + xy - x^2 = 0$$

$$\therefore y > 0 \text{ より } y = \frac{-x + \sqrt{5x^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x$$

$$\text{よって 3 辺が } \frac{\sqrt{5}-1}{2}x \text{ 一辺は } x$$

$$(\text{答}) \text{ 正方形 一辺 } \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\text{等脚台形 3 辺が } \frac{\sqrt{5}-1}{2}x$$

$$\text{一辺が } x$$