

〔I〕

- ア. ⑨ イ. ④ ウ. ⑥
エ. ⑤ オ. ⑥ カ. ⑩
キ. ⑦

〔II〕

- (1) (α, β) と $y = x + t$ に関して

対称な点を (γ, δ) とすると

$$(\gamma - \alpha, \delta - \beta) \cdot (1, 1) = 0$$

$$\therefore \gamma + \delta = \alpha + \beta \quad \cdots \textcircled{1}$$

($y = x + t$ に平行なベクトル)

$$\left(\frac{\gamma + \alpha}{2}, \frac{\beta + \delta}{2} \right)$$

は $y = x + t$ 上

$$\therefore \beta + \delta = \gamma + \alpha + 2t \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より } \gamma - \beta = \beta - \gamma - 2t$$

$$\gamma = \beta - t$$

$$\therefore \delta = \alpha + \beta - \gamma = \alpha + t$$

よって Ct 上の点 (x, y) とすると,

$(y - t, x + t)$ は D 上

$$\therefore \frac{(y - t)^2}{9} + \frac{(x + t)^2}{4} = 1$$

が Ct の方程式 $\cdots$ (答)

$$(2) \frac{(y - t)^2}{9} + \frac{(x + t)^2}{4} = 1$$

$$\therefore 4(y - t)^2 + 9(x + t)^2 = 36$$

$$13t^2 + (18x - 8y)t + 9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$$

t : 実数より

この t の 2 次方程式の判別式 $\Delta \geq 0$

$$\therefore (9x - 4y)^2 - 13(9x^2 + 4y^2 - 36) \geq 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 + 2xy \leq 13$$

$$(x + y)^2 \leq 13$$

$$\therefore -\sqrt{13} \leq x + y \leq \sqrt{13} \quad \cdots \text{(答)}$$

- (3) Ct と D が接するとき

D と $y = x + t$ が接する

よって

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(x + t)^2}{4} = 1$$

が重解を持つ

$$\therefore 4x^2 + 9x^2 + 18tx + 9t^2 - 36 = 0$$

$$13x^2 + 18tx + 9t^2 - 36 = 0$$

$$\text{判別式 } \Delta = 81t^2 - 13(9t^2 - 36) = 0$$

$$\therefore 36(t^2 - 13) = 0$$

$$t^2 = 13, \quad t = \pm\sqrt{13}$$

$t = \sqrt{13}$ のとき,

接点の x 座標

$$-\frac{9}{13}t = -\frac{9}{13}\sqrt{13}$$

y 座標

$$-\frac{9}{13}t + t = \frac{4}{13}t = \frac{4}{13}\sqrt{13}$$

$t = -\sqrt{13}$ のとき

$$\left(\frac{9}{13}\sqrt{13}, -\frac{4}{13}\sqrt{13} \right)$$

$$\text{(答)} \left(-\frac{9}{13}\sqrt{13}, \frac{4}{13}\sqrt{13} \right)$$

又は

$$\left(\frac{9}{13}\sqrt{13}, -\frac{4}{13}\sqrt{13} \right)$$

〔III〕

$$(1) \frac{dy}{d\theta} = -\sin^2 \theta + a \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 2\cos^2 \theta + a \cos \theta - 1$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 0 \text{ とすると}$$

$$\cos \theta = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8}}{4}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ より } 0 \leq \cos \theta \leq 1$$

$$\cos \theta = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 8}}{4}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 + 8} + a}$$

$$a > 0 \text{ より } \sqrt{a^2 + 8} + a > \sqrt{8}$$

$$\therefore \frac{2}{\sqrt{a^2 + 8} + a} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ に } \cos \theta = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 8}}{4}$$

となる θ が存在

それを α とすると

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dy}{d\theta}$	$\nearrow$	+	0	-	$\searrow$
y	$\nearrow$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\searrow$

よって

$$\theta_0 = \alpha$$

$$\therefore \cos \theta_0 (= \cos \alpha) = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 8}}{4} \quad \cdots \text{(答)}$$

$$(2) \frac{dx}{d\theta} = -2\sin \theta \cos \theta - a \sin \theta$$

$$\therefore \left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2$$

$$= \sin^2 \theta (2\cos \theta + a)^2$$

$$+ (2\cos^2 \theta + a \cos \theta - 1)^2$$

$$= (1 - \cos^2 \theta)(4\cos^2 \theta + 4a \cos \theta + a^2)$$

$$+ 4\cos^4 \theta + 4a \cos^3 \theta + a^2 \cos^2 \theta$$

$$- 4\cos^2 \theta - 2a \cos \theta + 1$$

$$= 2a \cos \theta + a^2 + 1 \quad \cdots \text{(答)}$$

- (3) 曲線の長さは

$$\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2} d\theta$$

$$= \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1 + \cos \theta)} d\theta$$

$$= \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= \left[4 \sin \frac{\theta}{2} \right]_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 4 \sin \frac{\theta_0}{2}$$

$$= 2\sqrt{2} - 2 \quad \cdots \text{(答)}$$

〔IV〕

- ア ⑥ イ ① ウ ⑧
エ ⑤ オ ① カ ⑩