

〔Ⅰ〕 次の(1)から(4)までの各問の空欄に該当するものを解答群の中から選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。

(1) 座標平面上の点 $P_n(x_n, y_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を次の条件(a), (b)を満たすようにとる。

(a) $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_1, y_1) = (1, 0)$

(b) $n \geq 1$ に対してベクトル $\overrightarrow{P_n P_{n+1}}$ は長さが $\overrightarrow{P_{n-1} P_n}$ の半分、かつ $\overrightarrow{P_{n-1} P_n}$ を反時計まわりに 90° だけ回転した向きを向いている。

このとき

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \boxed{\text{ア}}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \boxed{\text{イ}}$ である。

ア, イの解答群

- | | | | | |
|-----------------|------------------|------------------|-----------------|------------------|
| ① $\frac{1}{5}$ | ② $\frac{3}{10}$ | ③ $\frac{1}{3}$ | ④ $\frac{2}{5}$ | ⑤ $\frac{1}{2}$ |
| ⑥ $\frac{3}{5}$ | ⑦ $\frac{2}{3}$ | ⑧ $\frac{7}{10}$ | ⑨ $\frac{4}{5}$ | ⑩ $\frac{9}{10}$ |

- (2) n を正の整数とすると、関数 $f(x) = \frac{\log x}{x^n}$ ($x > 0$) は $x = \boxed{\text{ウ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる。ただし、 $\log x$ は自然対数でその底を e で表す。

ウ、エの解答群

- ① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{n}$ ③ $\frac{n}{e}$ ④ $\frac{e}{n}$ ⑤ $\frac{1}{ne}$
 ⑥ $e^{\frac{1}{n}}$ ⑦ $n^{\frac{1}{e}}$ ⑧ $\frac{1}{ne^n}$ ⑨ $n \log n$ ⑩ 1

(3) n 人がじゃんけんを 1 回行うとき、あいこになる確率は

$$\frac{3^n - \boxed{\text{オ}} + \boxed{\text{カ}}}{3^n} \text{である。}$$

オの解答群

- ① $3^2 \cdot 2^{n-2}$ ② 2^{n-1} ③ $3 \cdot 2^{n-1}$ ④ $3^2 \cdot 2^{n-1}$
⑤ 2^n ⑥ $3 \cdot 2^n$ ⑦ 2^{n+1} ⑧ $3 \cdot 2^{n+1}$
⑨ 3^{n-1} ⑩ $2 \cdot 3^{n-1}$

カの解答群

- ① -2 ② -3 ③ -4 ④ -5
⑤ -6 ⑥ 2 ⑦ 3 ⑧ 4
⑨ 5 ⑩ 6

- (4) $f(x) = -x^2 + ax + b$ (a, b は実数の定数) とする。 x が実数を動くとき、
 $f(x)$ が正の整数となるような x は 17 個あるという。このとき、 $y = f(x)$ のグ
 ラフと x 軸で囲まれる図形の面積は キ である。

キの解答群

- ① $12\sqrt{2}$ ② $\frac{64\sqrt{2}}{3}$ ③ $9\sqrt{3}$ ④ $\frac{28\sqrt{7}}{3}$ ⑤ $\frac{40\sqrt{10}}{3}$
 ⑥ $\frac{32}{3}$ ⑦ 36 ⑧ $\frac{140}{3}$ ⑨ $\frac{256}{3}$ ⑩ 144

〔Ⅱ〕 楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ を D とする。 D を直線 $y = x + t$ (t は実数) について対称移動した曲線を C_t とする。

- (1) C_t の方程式を求めよ。
- (2) t が実数全体を動くとき、 C_t の通過する領域を表す不等式を求めよ。
- (3) C_t と D が外接するとき、その接点の座標を求めよ。ただし、 C_t と D がただ 1 点で接し、その接点以外の C_t の点が D の外側にあるとき、 C_t と D は外接するという。

〔Ⅲ〕 a を正の定数とする。媒介変数 θ で表された曲線

$$x = (a + \cos \theta) \cos \theta, \quad y = (a + \cos \theta) \sin \theta \quad (*)$$

について考える。

(1) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で y が最大となる θ の値を θ_0 とおく。 $\cos \theta_0$ を a を用いて表せ。

(2) $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$ を $\cos \theta$ と a を用いて表せ。

(3) $a = 1$ であるとき、 $\theta_0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ に対して $(*)$ で与えられる曲線の長さを求めよ。

- 〔Ⅳ〕 次の文章のアからカまでの空欄に該当するものを解答群の中から選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。

座標平面上に3点 $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(1, \sqrt{3})$ をとり線分 OA 上に点 $P(p, 0)$, 線分 BP 上に点 $Q(x, y)$ をとる。

- (1) x, y が満たす関係式は

$$x + \boxed{\text{ア}} y + \boxed{\text{イ}} = 0$$

である。

- (2) $\triangle OBQ$ と $\triangle APQ$ の面積が等しくなるのは $y = \boxed{\text{ウ}}$ p のときである。

- (3) 点 P と点 Q が $\triangle OBQ$ と $\triangle APQ$ の面積が等しくなるように動くとき、点 Q の軌跡は

$$x = \boxed{\text{エ}} \quad (\boxed{\text{オ}} < y < \boxed{\text{カ}})$$

である。

ア、イの解答群

- ① $-p$ ② $p-1$ ③ p ④ $p+1$
 ⑤ $\frac{p}{3}$ ⑥ $\frac{p-1}{\sqrt{3}}$ ⑦ $\frac{p}{\sqrt{3}}$ ⑧ $\frac{p+1}{\sqrt{3}}$
 ⑨ $\sqrt{3}(p-1)$ ⑩ $\sqrt{3}(p+1)$

ウの解答群

- ① -2 ② $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $-\sqrt{3}$
 ⑤ $-2\sqrt{3}$ ⑥ $\frac{1}{2}$ ⑦ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⑧ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 ⑨ $\sqrt{3}$ ⑩ $2\sqrt{3}$

工の解答群

① $-\frac{2}{3}y^2 + \sqrt{2}y$

② $-\frac{3}{4}y^2 + \sqrt{2}y$

③ $-\frac{1}{2}y^2 + \sqrt{2}y$

④ $-\frac{\sqrt{3}}{3}y^2 + \sqrt{2}y$

⑤ $-\frac{2}{3}y^2 + \sqrt{3}y$

⑥ $-\frac{3}{4}y^2 + \sqrt{3}y$

⑦ $-\frac{1}{2}y^2 + \sqrt{2}y - \frac{1}{4}$

⑧ $-\frac{1}{2}y^2 + \sqrt{3}y + \frac{1}{4}$

⑨ $-\frac{\sqrt{3}}{3}y^2 + \sqrt{3}y - \frac{1}{4}$

⑩ $-\frac{\sqrt{3}}{4}y^2 + \sqrt{3}y + \frac{1}{4}$

オ、カの解答群

① 0

② $\frac{3}{4}$

③ 1

④ 2

⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

⑥ $\sqrt{2}$

⑦ $\frac{\sqrt{3}}{4}$

⑧ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

⑨ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

⑩ $\sqrt{3}$