

〔Ⅰ〕 次の各問の に入る数字を下の表から選んでアルファベットをマークせよ。同じアルファベットを選んでもかまわない。

1. $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ の範囲で, $y = \cos 2\theta + \sin \theta - \cos^2 \theta$ は, $\theta =$ (1) $^\circ$ のとき, 最大値 (2) となる。

2. コインを投げて xy 平面上の点 P を点 (a, b) から始めて次のように動かしていく。1 回投げて表が出たら x 軸方向に $+1$ 座標を動かし, 裏が出たら y 軸方向に $+1$ 座標を動かす。今, 5 回投げて P は, 点 (a, b) から点 $(5, 3)$ に移り, 6 回目点 $(5, 4)$ に移った。ここで, P が (a, b) から $(5, 3)$ に移る確率と (a, b) から $(5, 4)$ に移る確率はともに $\frac{5}{16}$ である。

このとき, $a =$ (3) , $b =$ (4) である。

3. 等差数列 $\{a_n\}$ が, ある自然数 k について m が k と $k+1$ のとき, ともに

$$\sum_{i=1}^m a_i + \int_0^m x^2 dx = \sum_{i=1}^m i^2$$

を満たす。このとき, $\{a_n\}$ の初項は (5) で, 公差は (6) である。

- | | | | |
|------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| A. -2 | B. -1 | C. $-\frac{1}{5}$ | D. $-\frac{3}{4}$ |
| E. 0 | F. $\frac{1}{4}$ | G. $\frac{1}{3}$ | H. $\frac{1}{2}$ |
| I. $\frac{2}{3}$ | J. 1 | K. 2 | L. 3 |
| M. 4.26 | N. 5 | O. 11 | P. 14 |
| Q. 17 | R. 21 | S. 26 | T. 30 |
| U. 33 | V. 40 | W. 45 | X. 60 |
| Y. 90 | Z. 180 | | |

〔Ⅱ〕 xy 平面上で半直線 ℓ_1 を $\ell_1: y = x (0 \leq x)$ とし, ℓ_1 に接する半径 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の円を C とする。ただし, C は ℓ_1 の上側にあるとする。

また, 直線 ℓ_2 を $\ell_2: y = ax + 1$ で定める。ここで, a は, 1 以外の実数とする。このとき, 次の問に答えよ。

1. C と ℓ_2 が接するとき, C の中心の座標を a で表せ。さらに, a が $a < 1$ と $a > 1$ の範囲を動くとき, C の中心の軌跡を図示せよ。
2. C の中心と原点 $(0, 0)$ との距離が $\sqrt{5}$ のとき, C と ℓ_2 が 2 点で交わるための条件を求めよ。

〔Ⅲ〕 n を自然数とし、集合 A_n を $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ で定める。また A_n の部分集合の個数を a_n と置く。このとき、次の問に答えよ。

1. A_3 の部分集合をすべて書き出せ。
2. $n \geq 1$ について、 $a_n = 2 a_{n-1}$ を示せ。ただし、 $a_0 = 1$ とする。
3. $n \geq 1$ について、 $a_n = 2^n$ を〔Ⅲ〕2の漸化式を用いずに証明せよ。