

問 I

(1)	ア	2	イ	6	ウ	0
	エ	2	オ	6	カ	0
	キ	7	ク	5	ケ	1
	コ	6	サ	5	シ	8
	ス	0	セ	5	ソ	2
	タ	2				

問Ⅱ

(1)	チ	7	ツ	3	テ	4
	ト	2	ナ	1	ニ	1
	ヌ	4	ネ	1	ノ	3

(2)	ハ	1	ヒ	9	フ	2
	ヘ	7	ホ	4	マ	3
	ミ	2	ム	1	メ	6
	モ	5	ヤ	9		

(3)	ユ	2	ヨ	8	ラ	3
	リ	3	ル	3	レ	5
	ロ	5	ワ	3		

問Ⅲ

$$(1) \quad \vec{a} = (1, 1, 1), \quad \vec{b} = (x_1, x_2, x_3) \text{ とする。}$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると ($0^\circ \leq \theta < 360^\circ$)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta, \quad |\cos \theta| \leq 1 \text{ より}$$

$$|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \geq (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$\therefore (1^2 + 1^2 + 1^2) \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \geq (1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3)^2$$

$$\therefore 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \geq (x_1 + x_2 + x_3)^2$$

よって $n=3$ のとき与不等式が成立する。

$$(2) \quad n=1 \text{ のとき } x_1^2 - x_1^2 \geq 0 \text{ より与不等式は成立する。}$$

$$n=m \text{ のとき, } m \sum_{k=1}^m x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^m x_k \right)^2 \geq 0 \cdots \textcircled{1} \text{ が成立するとして,}$$

$$(x_{m+1} - x_k)^2 \geq 0 \text{ より } x_{m+1}^2 + x_k^2 - 2x_{m+1}x_k \geq 0$$

$k=1, 2, \dots, m$ について加えると,

$$mx_{m+1}^2 + \sum_{k=1}^m x_k^2 - 2x_{m+1} \sum_{k=1}^m x_k \geq 0 \cdots \textcircled{2}$$

① + ② より,

$$\begin{aligned} m \left(\sum_{k=1}^m x_k^2 + x_{m+1}^2 \right) + \sum_{k=1}^m x_k^2 + x_{m+1}^2 \\ - \left\{ x_{m+1}^2 + 2x_{m+1} \sum_{k=1}^m x_k + \left(\sum_{k=1}^m x_k \right)^2 \right\} \geq 0 \end{aligned}$$

$$(m+1) \sum_{k=1}^{m+1} x_k^2 - \left(x_{m+1} + \sum_{k=1}^m x_k \right)^2 \geq 0$$

$$\therefore (m+1) \sum_{k=1}^{m+1} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{m+1} x_k \right)^2 \geq 0$$

よって $n=m+1$ のときも与不等式は成立する。

以上より, n を自然数とするとき,

$$n \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \geq 0 \text{ が成立する。}$$