

[I]

(1) *V*

(2) *S*

(3) *B*

(4) *B*

(5) *P*

(6) *Z*

[Ⅱ]

$$1 \quad (\vec{a} \cdot \vec{x}, \vec{b} \cdot \vec{x}) = (4, 2) \\ = 2\vec{x} \quad \cdots \text{答}$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{y}, \vec{b} \cdot \vec{y}) = (3, 3) \\ = 3\vec{y} \quad \cdots \text{答}$$

$$2 \quad \vec{x}_1 = a_1 \vec{x} + b_1 \vec{y} \quad \text{とすると, 各成分について,} \\ \begin{cases} 2 = 2a_1 + b_1 \\ 3 = a_1 + b_1 \end{cases} \quad \therefore a_1 = -1, \quad b_1 = 4$$

あとは漸化式により

$$\vec{x}_2 = (\vec{a} \cdot (-\vec{x} + 4\vec{y}), \vec{b} \cdot (-\vec{x} + 4\vec{y})) \\ = -(\vec{a} \cdot \vec{x}, \vec{b} \cdot \vec{x}) + 4(\vec{a} \cdot \vec{y}, \vec{b} \cdot \vec{y}) \\ = -2\vec{x} + 12\vec{y} \quad \cdots \text{答}$$

同様に

$$\vec{x}_3 = -2(\vec{a} \cdot \vec{x}, \vec{b} \cdot \vec{x}) + 12(\vec{a} \cdot \vec{y}, \vec{b} \cdot \vec{y}) \\ = -4\vec{x} + 36\vec{y} \quad \cdots \text{答}$$

$$3 \quad \vec{x}_n = -2^{n-1} \vec{x} + 4 \cdot 3^{n-1} \vec{y} \quad \cdots \text{①}$$

と推定される。

(i) $n=1$ のとき, 前問により成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき, ①が成り立つと仮定すると, 漸化式により, 前問のようにして,

$$\vec{x}_{k+1} = -2^{k-1} (\vec{a} \cdot \vec{x}, \vec{b} \cdot \vec{x}) + 4 \cdot 3^{k-1} (\vec{a} \cdot \vec{y}, \vec{b} \cdot \vec{y}) \\ = -2^k \vec{x} + 4 \cdot 3^k \vec{y}$$

となり, $n=k+1$ のときも成り立つ。

よって, (i)(ii) から数学的帰納法により,

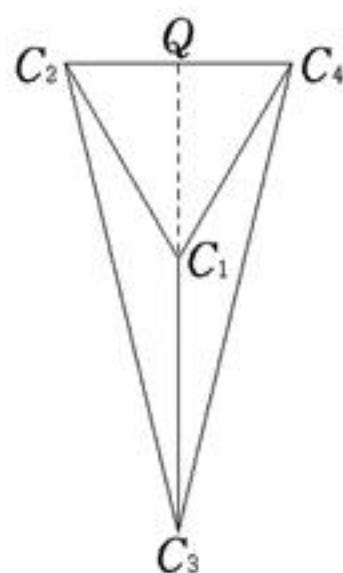
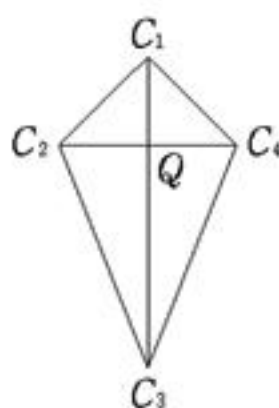
すべての n について ① が成り立ち,

$$a_n = -2^{n-1}, \quad b_n = 4 \cdot 3^{n-1} \quad \cdots \text{答}$$

$$4 \quad \sum_{n=1}^{2004} \vec{x}_n = -\sum_{n=1}^{2004} 2^{n-1} \vec{x} + 4 \sum_{n=1}^{2004} 3^{n-1} \vec{y} \\ = -(2^{2004} - 1)(2, 1) + 2(3^{2004} - 1)(1, 1) \\ = (2 \cdot 3^{2004} - 2^{2005}, \quad 2 \cdot 3^{2004} - 2^{2004} - 1) \quad \cdots \text{答}$$

[Ⅲ]

- 1 問題の条件から、右図の2通りの場合が考えられるが、どちらも直線 C_1C_3 に関して対称だから、 Q は C_2 と C_4 の中点となる。よって、



$$C_2Q = \frac{d_{24}}{2} = 3 \quad \cdots \text{答}$$

- 2 $C_1C_3 \perp C_2C_4$ より、2つの場合をまとめて、

$$\sqrt{d_{23}^2 - C_2Q^2} \pm \sqrt{d_{12}^2 - C_2Q^2} = d_{13}$$

$$\sqrt{5d_{12}^2 - 9} \pm \sqrt{d_{12}^2 - 9} = 12$$

$t = d_{12}^2$ として両辺を2乗して、

$$6t - 18 \pm 2\sqrt{(5t - 9)(t - 9)} = 144$$

$$3t - 81 = \mp \sqrt{(5t - 9)(t - 9)}$$

さらに両辺を2乗して整理すると、

$$t^2 - 108t + 1620 = 0$$

$$(t - 18)(t - 90) = 0$$

$$t = 18, \quad 90$$

$$\therefore d_{12} = 3\sqrt{2}, \quad 3\sqrt{10}$$

このうち $d_{12} > d_{24} = 6$ をみたすものは

$$d_{12} = 3\sqrt{10} \quad \cdots \text{答}$$

で、4都市の位置関係は図の右側のようになる。

$$3 \quad y_{12} : y_{23} = \frac{p_1}{d_{12}^2} : \frac{p_3}{d_{23}^2} = p_1 : \frac{p_3}{5}$$

これが3:1となることから

$$p_1 : p_3 = 3 : 5 \quad \cdots \text{①}$$

$$y_{23} : y_{34} = \frac{p_2}{d_{23}^2} : \frac{p_4}{d_{34}^2} = p_2 : p_4$$

これが4:3となることから

$$p_2 : p_4 = 4 : 3 \quad \cdots \text{②}$$

よって、①②と $p_1 : p_4 = 2 : 1$ により

$$p_1 : p_2 : p_3 : p_4 = 6 : 4 : 10 : 3$$

また、これにより、

$$y_{12} : y_{14} = \frac{p_2}{d_{12}^2} : \frac{p_4}{d_{14}^2} = 4 : 3 \quad \cdots \text{③}$$

$$y_{13} : y_{24} = \frac{p_1 p_3}{d_{13}^2} : \frac{p_2 p_4}{d_{24}^2} = 5 : 4 \quad \cdots \text{④}$$

$$y_{12} : y_{13} = \frac{p_2}{d_{12}^2} : \frac{p_3}{d_{13}^2} = \frac{4}{90} : \frac{10}{144} = 16 : 25 \quad \cdots \text{⑤}$$

よって、③④⑤と $y_{12} : y_{23} : y_{34} = 12 : 4 : 3$ により、 y_{ij} の大小を比較すると y_{13} が最も大きいから、

A_1 と A_3 の間の交通量が最も多い。 …答