

(I)

ア. ⑧

イ. ⑦

ウ. ⑩

エ. ⑦

オ. ⑩

カ. ④

〔Ⅱ〕

$$(1) \quad \cos \theta = \frac{1}{2p} \text{ より } p = \frac{1}{2 \cos \theta}$$

$$\begin{aligned} pz^2 &= \frac{1}{2 \cos \theta} (\cos \theta + i \sin \theta)^2 \\ &= \frac{1}{2 \cos \theta} (\cos^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta) \\ &= \frac{1}{2 \cos \theta} (\cos^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta - 1 + \cos^2 \theta) \\ &= \cos \theta + i \sin \theta - \frac{1}{2 \cos \theta} \\ &= z - p \end{aligned}$$

(2) ・ $n=1$ のとき $p^0 z^1 = a_1 z + b_1$, $a_1=1$, $b_1=0$ とすれば成り立つ。

・ $n=k$ のとき $p^{k-1} z^k = a_k z + b_k \cdots \textcircled{1}$ をみたす整数 a_k, b_k (a_k は p で割り切れない) が存在すると仮定する。

$\textcircled{1}$ の両辺に pz をかけると

$$p^k z^{k+1} = a_k \cdot pz^2 + pb_k z = a_k(z-p) + pb_k z = (pb_k + a_k)z - pa_k$$

$a_{k+1} = pb_k + a_k$, $b_{k+1} = -pa_k$ と a_{k+1}, b_{k+1} を定めれば, a_{k+1} は p でわりきれない整数, b_{k+1} は整数であって,

$p^{k+1-1} z^{k+1} = a_{k+1} z + b_{k+1}$ とおける。よって $n=k+1$ のときも成り立つ。

以上より, すべての自然数 n に対して条件(i), (ii)をみたす整数 a_n, b_n が存在する。

(3) $\frac{\theta}{\pi} = \frac{l}{m}$ をみたす自然数 l, m が存在したとする。 $\theta = \frac{l}{m} \pi$

$$\begin{aligned} z^m &= \left(\cos \frac{l}{m} \pi + i \sin \frac{l}{m} \pi \right)^m = \cos l\pi + i \sin l\pi \\ &= \cos l\pi = (-1)^l \end{aligned}$$

$$(2) \text{より, } p^{m-1} z^m = (-1)^l p^{m-1} = a_m z + b_m$$

$$= a_m \left(\cos \frac{l}{m} \pi + i \sin \frac{l}{m} \pi \right) + b_m$$

$\therefore (-1)^l p^{m-1} = a_m \cos \frac{l}{m} \pi + b_m + ia_m \sin \frac{l}{m} \pi \cdots \textcircled{2}$ をみたす整数 a_m, b_m が存在する。

$0 < \theta = \frac{l}{m} \pi < \pi$ また a_m は p の倍数でないから $a_m \neq 0$

$\textcircled{2}$ の左辺は実数だが, $\textcircled{2}$ の虚部は 0 ではなく不合理。

これは $\frac{\theta}{\pi} = \frac{l}{m}$ をみたす自然数 l, m が存在したという仮定が誤りであることを示す。

よって, $\frac{\theta}{\pi} = \frac{l}{m}$ をみたす自然数 l, m は存在しない。

[Ⅲ]

$$f(x) = 2x - 3 + \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt \quad \cdots \textcircled{1}$$

(1) $\textcircled{1}$ で $x=0$ とし、 $f(0) = \underline{\underline{-3}}$

(2) $f(x) = 2x - 3 + \sin x \int_0^x f(t) \cos t dt - \cos x \int_0^x f(t) \sin t dt$

$$f'(x) = 2 + \cos x \int_0^x f(t) \cos t dt + \sin x f(x) \cos x$$

$$+ \sin x \int_0^x f(t) \sin t dt - \cos x f(x) \sin x$$

$$= 2 + \cos x \int_0^x f(t) \cos t dt + \sin x \int_0^x f(t) \sin t dt$$

$x'=0$ とし、 $f'(0) = \underline{\underline{2}}$

(3) $f''(x) = -\sin x \int_0^x f(t) \cos t dt + \cos x f(x) \cos x$

$$+ \cos x \int_0^x f(t) \sin t dt + \sin x f(x) \cos x$$

$$= f(x) - \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$$

$\textcircled{1}$ より $f''(x) = \underline{\underline{2x-3}}$

(4) $f'(x) = \int (2x-3) dx = x^2 - 3x + C_1$ (C_1 : 積分定数)

$$f'(0) = C_1 = 2 \quad \therefore f'(x) = \underline{\underline{x^2 - 3x + 2}}$$

$$f(x) = \int (x^2 - 3x + 2) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C_2$$

(C_2 : 積分定数)

$$f(0) = C_2 = -3 \quad \therefore f(x) = \underline{\underline{\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 3}}$$

[IV]

ア. ⑥

イ. ④

ウ. ⑨

エ. ④

オ. ⑧