

数 学 問 題

最初に、これを読むこと。

1. この問題冊子は、2 ページまでである。
2. この試験時間は、60 分である。
3. 解答用紙には、あなたの受験番号が印刷されている。受験番号が正しいかどうか、受験票と照合し、確認すること。
4. 解答用紙の所定の欄に氏名を記入すること。
5. 解答はすべて解答用紙の所定の欄にマークするか、または所定の欄に記述すること。解答欄は裏面にもある。
6. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また所定の欄以外のところには、絶対に記入しないこと。
7. 解答は、必ずHBの黒鉛筆を使用すること。
8. 訂正する場合は、訂正箇所を消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
9. 問題に指定された数より多くマークしないこと。
10. 解答用紙は持ち帰らないこと。
11. この問題冊子は必ず持ち帰ること。
12. 解答をマークするときには、下記の記入例を参照すること。

(マーク記入例)

良い例	悪い例
	

問Ⅰ $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ に対して、関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x) = (\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2 - 2\sqrt{2}(\cos x - \sqrt{3} \sin x) + 2$$

下記の空欄に当てはまる適当な数字を所定の解答欄にマークせよ。

(1)

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = \boxed{\text{ア}} \sin(x + \boxed{\text{イ}} \boxed{\text{ウ}}^\circ)$$

$$\cos x - \sqrt{3} \sin x = \boxed{\text{エ}} \cos(x + \boxed{\text{オ}} \boxed{\text{カ}}^\circ)$$

となる。

(2) 関数 $f(x)$ は、 $x = \boxed{\text{キ}} \boxed{\text{ク}}^\circ$ 、 $\boxed{\text{ケ}} \boxed{\text{コ}} \boxed{\text{サ}}^\circ$ のとき、最大値 $\boxed{\text{シ}}$ をとる。

また、 $f(x)$ は $x = \boxed{\text{ス}}^\circ$ のとき、最小値 $\boxed{\text{セ}} - \boxed{\text{ソ}} \sqrt{\boxed{\text{タ}}}$ をとる。

問Ⅱ 下記の空欄に当てはまる適当な数字を所定の解答欄にマークせよ。ただし分数はすべて既約分数の形にしない。

(1) 1 辺の長さが 4 の正三角形 ABC の 3 辺 BC, CA, AB をそれぞれ 3 : 1 に内分する点を A' , B' , C' とする。三角形 $A'B'C'$ の面積は

$$\frac{\boxed{\text{チ}} \sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}} \text{ であり、 } \sin \angle AC'B' = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ト}} \boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}} \boxed{\text{ヌ}}} \text{ となる。}$$

また、線分 AA' の長さは $\sqrt{\boxed{\text{ネ}} \boxed{\text{ノ}}}$ である。

(2) 3 つのサイコロを投げる。このとき、出た目の積が 3 の倍数になる確率は

$$\frac{\boxed{\text{ハ}} \boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}} \boxed{\text{ヘ}}}$$

である。また、出た目の和が 5 の倍数になる確率は

$$\frac{\boxed{\text{ホ}} \boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}} \boxed{\text{ム}} \boxed{\text{メ}}}$$

$$\frac{\boxed{\text{モ}}}{\boxed{\text{ヤ}}}$$

である。

(3) 複素数平面上で、点 A は $8 + 2i$ を表すとする。点 A を原点の周りに 90° 回転した点を B とするとき、点 B を表す複素数は $-\boxed{\text{ユ}} + \boxed{\text{ヨ}}i$ である。点 C を三角形 ABC が正三角形になるように選ぶとき、点 C を表す複素数で実部が正となるのは、

$$\boxed{\text{ラ}} + \boxed{\text{リ}} \sqrt{\boxed{\text{ル}}} + (\boxed{\text{レ}} + \boxed{\text{ロ}} \sqrt{\boxed{\text{ワ}}})i$$

である。

問Ⅲ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ を実数とする。このとき、

$$n \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \geq 0$$

に関して、次の問いに答えよ。

- (1) $n = 3$ のとき、上の不等式が成り立つことを示しなさい。
- (2) n を自然数とすると、上の不等式が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明しなさい。