数　学　問　題

注　意

1. この問題冊子は8ページあります。
2. あなたの受験番号は解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と，受験票の番号が一致していることを確認しなさい。
3. 解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔I〕については解答を解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
5. 問題〔II〕は解答用紙のおもてに，問題〔III〕は解答用紙の裏に解答しなさい。
6. 問題〔IV〕については解答を解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
7. 1問につき2つ以上マークしないこと。2つ以上マークした場合には，その解答は無効になります。
8. 解答は，必ずH，FまたはHBの黒鉛筆を使用して記入しなさい。
9. 訂正は，消しゴムできれいに消し，消しクズを紙面に残さないようにしなさい。
10. 解答用紙は，絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
11. 解答用紙は，必ず提出しなさい。
12. 試験時間は90分です。

※　この問題冊子は必ず持ち帰りなさい。

〔Ｉ〕 次の(1)から(3)までの各問の空欄に該当するものを解答群の中から選び，解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。

(1) $\dfrac{d}{dx}\left[x\sqrt{x^2+3}+a\log\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)\right]=b\sqrt{x^2+3}$ を満たすように a，b を定めると $a=$ ア ，$b=$ イ である。

ア，イの解答群

① -4	② -3	③ -2	④ -1	⑤ 0
⑥ 1	⑦ 2	⑧ 3	⑨ 4	⑩ 5

(2) $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。行列 A_0, A_1, …, A_n が決まっているとき，

行列 A_{n+1} を次で決める。サイコロを１回ふって

１，２が出たならば $A_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A_n$

３，４，５，６が出たならば $A_{n+1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A_n$

このとき，$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である確率は［ウ］，$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である確率は［エ］である。

ウの解答群

① 0　② 1　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{1}{6}$

⑥ $\frac{5}{6}$　⑦ $\frac{1}{9}$　⑧ $\frac{2}{9}$　⑨ $\frac{4}{9}$　⑩ $\frac{5}{9}$

エの解答群

① 0　② $\frac{20}{243}$　③ $\frac{41}{243}$　④ $\frac{80}{243}$　⑤ $\frac{1}{3}$

⑥ $\frac{40}{81}$　⑦ $\frac{121}{243}$　⑧ $\frac{122}{243}$　⑨ $\frac{160}{243}$　⑩ $\frac{161}{243}$

(3) 数列 −2, 4, 4, −8, −8, −8, 16, 16, 16, 16, −32, …の 第2004項は$(-2)^{\boxed{\text{オ}}}$である。また第2004項までの和は

$$\frac{\boxed{\text{カ}}\times(-2)^{\boxed{\text{オ}}}-2}{9}$$である。

オの解答群

① 10　② 11　③ 43　④ 44　⑤ 45

⑥ 46　⑦ 60　⑧ 61　⑨ 62　⑩ 63

カの解答群

① 644　② 338　③ 275　④ 272　⑤ 185

⑥ −34　⑦ −100　⑧ −136　⑨ −187　⑩ −544

〔Ⅱ〕 p を2以上の自然数とする。$\cos\theta = \dfrac{1}{2p}$ ， $0 < \theta < \pi$ を満たす実数 θ に対して，$z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおく。ただし，i は虚数単位とし，角の単位はラジアンとする。

(1) $pz^2 = z - p$ を示せ。

(2) すべての自然数 n に対して，次の条件(i)と(ii)を満たす整数 a_n，b_n が存在することを数学的帰納法により示せ。

(i) $p^{n-1}z^n = a_n z + b_n$

(ii) a_n は p で割り切れない

(3) $\dfrac{\theta}{\pi} = \dfrac{\ell}{m}$ を満たす自然数 ℓ，m は存在しないことを示せ。

〔Ⅲ〕 関数$f(x)$は

$$f(x)=2x-3+\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt$$

を満たし，第2次導関数$f''(x)$をもつものとする。

(1) $f(0)$を求めよ。

(2) 三角関数の加法定理を用いて，$f'(0)$を求めよ。

(3) $f''(x)$をxの整式で表せ。

(4) $f'(x)$および$f(x)$を求めよ。

〔Ⅳ〕 次の文章のアからオまでの空欄に該当するものを解答群の中から選び，解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。

空間内に4点A(3，0，4)，B(－3，0，－4)，C(0，10，0)，D(－8，5，6)をとる。

(1) △ABC の面積は [ア] である。

(2) 点Dから△ABC を含む平面に引いた垂線と，この平面との交点をHとする。Hの座標は([イ] ， [ウ] ， [エ])である。

(3) 四面体 ABCD の体積は [オ] である。

アの解答群

① 10　② 20　③ 25　④ 32　⑤ 40
⑥ 50　⑦ 64　⑧ 75　⑨ 100　⑩ 120

イ，ウ，エの解答群

① -5　② $-\frac{8}{5}$　③ $-\frac{6}{5}$　④ 0　⑤ $\frac{6}{5}$
⑥ $\frac{8}{5}$　⑦ 3　⑧ 4　⑨ 5　⑩ 6

オの解答群

① $\frac{35}{3}$　② $\frac{70}{3}$　③ 35　④ $\frac{125}{3}$　⑤ 70
⑥ $\frac{250}{3}$　⑦ 125　⑧ $\frac{500}{3}$　⑨ 250　⑩ 500

◇M22(372—272)