

[I]

(1) P 1 $(-3, -2)$

W 2 $y = \frac{4}{3}x + 2$

解説 直線 PQ と l は垂直だから、

$Q(a, b)$ とすると、

$$-2 \cdot \frac{b}{a-1} = -1 \quad \dots \textcircled{1}$$

また、線分 PQ の中点は l 上にあるから、

$$\frac{b}{2} = -2 \cdot \frac{a-1}{2} - 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より、 $(a, b) = (-3, -2)$ $\dots$ P 1

l と x 軸の交点は $(-\frac{3}{2}, 0)$ だから、

n は Q と $(-\frac{3}{2}, 0)$ を通る直線 n 、

$$n: y = \frac{2}{-\frac{3}{2}+3} \left(x + \frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore n: y = \frac{4}{3}x + 2 \quad \dots$$
 W 2

(2) P 1 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ W 2 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

解説 $|\vec{r}| = |\vec{r}'| = \sqrt{2}$ より、

$$\begin{cases} c^2 + d^2 = 2 & \dots \textcircled{1} \\ (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = 2 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{2}$ は $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 2$ と変形できるから、 $\textcircled{1}$ より

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

次に、角の条件に用いるのは内積を用いて、

$$\begin{cases} ac + bd = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} & \dots \textcircled{4} \\ c(ac - bd) + d(ad + bc) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} & \dots \textcircled{5} \end{cases}$$

$\textcircled{5}$ の左辺は $a(c^2 + d^2) = 2a$ だから、

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad b = \frac{1}{2} \quad \dots$$
 P 1

$\textcircled{4}$ より、 $\sqrt{3}c + d = \sqrt{6}$ となるから、 $\textcircled{1}$ より、

$$c = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad d = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \dots$$
 W 2

(3) P $x < -1$ 1 $x > 0$

(4) P 6 W 2 $\frac{34}{3}$

解説 $\textcircled{1}$ $t = 3 - 3h$ とすると、微分の定義から、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-3h) - f(3)}{h} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{f(t) - f(3)}{-\frac{t-3}{3}}$$

$$= -3f'(3)$$

$$= -6 \quad \dots$$
 P

$\textcircled{2}$ 面積は

$$\int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^3 f(x) dx = \frac{34}{3} \quad \dots$$
 W 2

(5) P 8

解説 白・黒球の個数をそれぞれ a, b ($a > b$)

とすると、

$$\begin{cases} a + b = 22 \\ \frac{aC_2 + bC_2}{22C_2} = \frac{17}{33} \end{cases}$$

これを解くと、

$$a = 14, \quad b = 8 \quad \dots$$
 P

(6) P 1 $(0, 2)$ W 2

W 1 $(0, 0)$

解説 軌跡を $x + yi$ (x, y は実数) とすると、

$$x + yi = \frac{4}{t-i} = \frac{4}{t^2+1} (t+i)$$

実部と虚部を比較して、

$$x = \frac{4t}{t^2+1}, \quad y = \frac{4}{t^2+1} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\therefore x^2 + y^2 = \frac{4^2(t^2+1)}{(t^2+1)^2} = \frac{4^2}{t^2+1} = 4y$$

$$\therefore x^2 + (y-2)^2 = 2^2$$

ただし、 $\textcircled{1}$ より、 $0 < y \leq 4$ となるから、

中心 $(0, 2)$ 、半径 2 の円 n 、 $(0, 0)$ を除く。 $\dots$ P 2

[II]

- (1) ① $\sqrt{2}$ が有理数であったとすると、
互いに素な自然数 a, b ($a \neq 1$) を用いて

$$\sqrt{2} = \frac{b}{a}$$

と表せる。これは

$$2a^2 = b^2$$

と変形でき、 b は 2 を素因数にもつ 2 とわかる。

そこで $b = 2b'$ とすると、 $a^2 = 2b'^2$ となり、

同様にして a は 2 を素因数にもつ 2 になり、

a と b が互いに素である 2 とに反する。

よって、 $\sqrt{2}$ は無理数である。(証明終)

- (2) ② もし $x \geq 0$ であったとすると、 $x^3 + x + 1$ は
0 になりえないから、 $x < 0$ である。

x が有理数であったとすると、互いに素な
自然数 c, d ($c \neq 1$) を用いて

$$x = -\frac{d}{c}$$

と表せる。これを方程式に代入すると、

$$-\frac{d^3}{c^3} - \frac{d}{c} + 1 = 0$$

$$c^3 = d(c^2 + d^2)$$

もし $d \geq 2$ であったとすると、 c は d の素因数を
素因数にもつ 2 になり、 c と d が互いに素である
2 とに反するから、 $d = 1$ 。このとき、

$$c^3 = c^2 + 1$$

$$c(c^2 - 1) = 1$$

となり、これをみたす自然数 c は存在しない。

よって、 x は無理数である。(証明終)

- (2) ① $n \neq 1$ といふ n を素因数分解して

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$$

(p_i は素数, α_i は自然数)

と表せたとすると、

$$n^3 = p_1^{3\alpha_1} p_2^{3\alpha_2} \cdots p_m^{3\alpha_m}$$

これが 3 の倍数ならば、 $p_1, p_2, \dots, p_m$ の

いずれかは 3 に等しいはずだから、

もとの n も 3 の倍数になる。(証明終)

- (2) ② $\sqrt[3]{3}$ が有理数であったとすると、

互いに素な自然数 e, f ($e \neq 1$) を用いて

$$\sqrt[3]{3} = \frac{f}{e}$$

と表せる。これは

$$3e^3 = f^3$$

と変形でき、 f^3 は 3 の倍数になるから ① より

f は 3 の倍数になる。そこで $f = 3f'$ とすると

$$e^3 = 9f'^3$$

となり、同様にして e は 3 の倍数にな

り、 e と f が互いに素である 2 とに反する。

よって、 $\sqrt[3]{3}$ は無理数である。(証明終)