

数 学 問 題

最初に、これを読むこと。

1. この問題冊子は、2 ページまでである。
2. この試験時間は、60 分である。
3. 解答用紙には、あなたの受験番号が印刷されている。受験番号が正しいかどうか、受験票と照合し、確認すること。
4. 解答用紙の所定の欄に氏名を記入すること。
5. 解答はすべて解答用紙の所定の欄にマークするか、または所定の欄に記述すること。解答欄は裏面にもある。
6. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また所定の欄以外のところには、絶対に記入しないこと。
7. 解答は、必ずHBの黒鉛筆を使用すること。
8. 訂正する場合は、訂正箇所を消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
9. 問題に指定された数より多くマークしないこと。
10. 解答用紙は持ち帰らないこと。
11. この問題冊子は必ず持ち帰ること。
12. 解答をマークするときには、下記の記入例を参照すること。

(マーク記入例)

良い例	悪い例
	

問Ⅰ xy 平面において、次の連立不等式で表される領域 D を考える。

$$\begin{cases} \log_2 y \leq \log_2 x + \log_2 (4 - x) \\ y \geq 2x - 3 \\ y \geq -2x + 5 \end{cases}$$

下記の空欄に当てはまる適当な数字を所定の解答欄にマークせよ。ただし分数はすべて既約分数の形にしろ。

(1) 領域 D の面積は $\frac{\boxed{\text{ア}} \boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(2) 直線 $x + y = k$ が領域 D と共有点をもつとき、 k のとりうる範囲は

$$\boxed{\text{エ}} \leq k \leq \frac{\boxed{\text{オ}} \boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

である。

問Ⅱ 下記の空欄に当てはまる適当な数字を所定の解答欄にマークせよ。ただし分数はすべて既約分数の形にしろ。

(1) コイン投げのゲームを行う。コインは中立の立場の人が投げる。2回続けて表が出た場合はAの勝ち、2回続けて裏が出た場合はBの勝ちとし、終了する。

コインは最多で6回まで投げられることにすると、Aが勝つ確率は

$$\frac{\boxed{\text{ク}} \boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}} \boxed{\text{サ}}}$$

別のコイン投げのゲームを行う。コインを6回投げて、表が出た回数を n とするとき、 7^n 円の賞金を得られるとする。賞金の期待値は

$$\boxed{\text{シ}} \boxed{\text{ス}} \boxed{\text{セ}} \boxed{\text{ソ}} \text{円である。}$$

(2) k を整数とし、2次方程式 $3x^2 - kx + 72 = 0$ を考える。この2次方程式の解がすべて整数であるような k は $\boxed{\text{タ}}$ 個存在し、その中で k の最大値は

$$\boxed{\text{チ}} \boxed{\text{ツ}} \text{である。}$$

(3) 複素数平面上で考える。複素数 $w = 4\sqrt{3} + 4i$ に対して、次の2つの等式

$$|z - w| = 4\sqrt{3}$$

$$|z| = 4$$

を満たす複素数 z は2個ある。実部が小さい方を z_1 とし、もう一方を z_2 とするとき、 $z_1 = \boxed{\text{テ}} i$ となり、 $z_2 = \boxed{\text{ト}} \sqrt{\boxed{\text{ナ}}} - \boxed{\text{ニ}} i$ となる。このとき、

$$\left(\frac{z_2 - w}{z_1 - w}\right)^4 = -\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}} - \frac{\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}} i$$

となる。 z_1 の表す点を P とし、 z_2 の表す点を Q とする。原点 O の直線 PQ に関して対称な点を表す複素数は $\boxed{\text{ヒ}} \sqrt{\boxed{\text{フ}}} + \boxed{\text{ヘ}} i$ である。

問Ⅲ 平面上のベクトル $\vec{a}_n, \vec{a}_{n-1}, \vec{b}_n, \vec{b}_{n-1}$ (n は $n \geq 2$ を満たす整数)は

$$\begin{cases} \vec{a}_n = \frac{3}{4}\vec{a}_{n-1} + \frac{1}{4}\vec{b}_{n-1} \\ \vec{b}_n = \frac{1}{4}\vec{a}_{n-1} + \frac{3}{4}\vec{b}_{n-1} \end{cases}$$

を満たしているとする。

このとき、次の問いに対して所定の解答欄に答を書きなさい。

(1) $n \geq 2$ を満たすすべての整数に対して、次の不等式が成り立つことを証明しなさい。

$$\vec{a}_n \cdot \vec{b}_n \geq \vec{a}_{n-1} \cdot \vec{b}_{n-1}$$

ただし、 $\vec{a}_n \cdot \vec{b}_n, \vec{a}_{n-1} \cdot \vec{b}_{n-1}$ は、それぞれ $\vec{a}_n$ と $\vec{b}_n, \vec{a}_{n-1}$ と $\vec{b}_{n-1}$ の内積を表すものとする。

(2) $\vec{a}_n, \vec{b}_n$ を $\vec{a}_1, \vec{b}_1$ を用いて表しなさい。