

## 数 学 問 題

## 注 意

1. この問題冊子は5ページあります。解答用紙には、おもてと裏があります。
2. あなたの受験番号は解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と、受験票の番号が一致していることを確認しなさい。
3. 解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔Ⅰ〕の解答は、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
5. 問題〔Ⅱ〕は、解答用紙の所定の欄に解答しなさい。
6. 問題〔Ⅲ〕の解答は、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
7. 問題〔Ⅳ〕は、解答用紙の所定の欄に解答しなさい。
8. 1問につき2つ以上マークしないこと。2つ以上マークした場合には、その解答は無効になります。
9. 解答は、必ずHBの黒鉛筆を使用して記入しなさい。
10. 訂正は、消しゴムできれいに消し、消しクズを紙面に残さないようにしなさい。
11. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
12. 解答用紙は、必ず提出しなさい。
13. 試験時間は90分です。

※ この問題冊子は必ず持ち帰りなさい。

〔Ⅰ〕 以下の問に答えよ。

- (1) 次の空欄ア、イに当てはまるものを解答群の中から選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin^2 x \, dx = \boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}} \pi^2$$

アの解答群

- |                 |                 |        |                  |                  |
|-----------------|-----------------|--------|------------------|------------------|
| ① $-8$          | ② $-4$          | ③ $-2$ | ④ $-\frac{1}{2}$ | ⑤ $-\frac{1}{4}$ |
| ⑥ $\frac{1}{4}$ | ⑦ $\frac{1}{2}$ | ⑧ $2$  | ⑨ $4$            | ⑩ $8$            |

イの解答群

- |                 |                 |                 |                 |                 |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ① $0$           | ② $\frac{1}{8}$ | ③ $\frac{1}{4}$ | ④ $\frac{3}{8}$ | ⑤ $\frac{1}{2}$ |
| ⑥ $\frac{5}{8}$ | ⑦ $\frac{3}{4}$ | ⑧ $\frac{7}{8}$ | ⑨ $1$           | ⑩ $2$           |

- (2) 次のウからシに当てはまる0から9までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし  $\boxed{\text{ウ}}$  と  $\boxed{\text{カ}}$  は1桁の数,  $\boxed{\text{エオ}}$ ,  $\boxed{\text{キク}}$ ,  $\boxed{\text{ケコ}}$ ,  $\boxed{\text{サシ}}$  は2桁の数である。なお分数は既約分数にすること。

正十二角形の頂点から相異なる3点を無作為に選び, その3点を頂点とする三角形  $S$  を考える。

(a)  $S$  が正三角形となる確率は  $\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$  である。

(b)  $S$  が直角三角形となる確率は  $\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}$  である。

(c)  $S$  が二等辺三角形となる確率は  $\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$  である。ただし正三角形も二等辺三角形とみなす。

〔Ⅱ〕 四面体の頂点  $A_1, A_2, A_3, A_4$  を中心とし、半径がそれぞれ  $r_1, r_2, r_3, r_4$  の4つの球が、どの2つも互いに外接しているという。以下の問に答えよ。

- (1)  $A_1A_2 + A_3A_4 = A_1A_3 + A_2A_4 = A_1A_4 + A_2A_3$  を示せ。
- (2)  $(A_1A_3)^2 + (A_2A_4)^2 - (A_1A_4)^2 - (A_2A_3)^2$  を  $r_1, r_2, r_3, r_4$  で表せ。
- (3) 2つのベクトル  $\overrightarrow{A_1A_2}$  と  $\overrightarrow{A_3A_4}$  が垂直ならば、4つの球のうち少なくとも2つは等しい半径をもつことを証明せよ。

〔Ⅲ〕  $a, b$  を正の数とし、座標平面上に点  $P(a, b)$  をとる。点  $P$  を通る傾きが負の直線  $\ell$  と  $x$  軸との交点を  $A$ 、 $y$  軸との交点を  $B$  とする。直線  $\ell$  の傾きを  $-m$  ( $m > 0$ ) とおく。次の空欄①、②、③に当てはまる数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1)  $AB$  の長さは  $(ma + b) \sqrt{\text{①}}$  である。

(2)  $m$  を変化させるとき、 $AB$  の長さが最小になるのは  $m = \text{②}$  のときである。

(3)  $m$  が(2)で求めた値をとるとき、 $\frac{PB}{PA} = \text{③}$  である。

〔Ⅳ〕  $n$  は自然数とする。 $\log x$  は自然対数で、その底を  $e$  で表す。次の問に答えよ。

(1)  $f(x) = \frac{x}{(\log x)^{n-1}} - \int_{e^n}^x \frac{dt}{(\log t)^n}$  とおく。 $f(x)$  は  $x \geq e^n$  の範囲で単調増加関数であることを示せ。

(2)  $x \geq e^n$  のとき  $\int_{e^n}^x \frac{dt}{(\log t)^n} < \frac{x}{(\log x)^{n-1}}$  であることを示せ。

(3)  $a$  は  $a > 1$  をみたす実数とする。

$$\int_a^x \frac{dt}{\log t} = \left[ \frac{t}{\log t} + \frac{t}{(\log t)^2} \right]_a^x + 2 \int_a^x \frac{dt}{(\log t)^3}$$

であることを示せ。

(4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} \int_{e^3}^x \frac{dt}{\log t} = 1$  を証明せよ。

ただし、必要があれば  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$  であることを用いてよい。