

I

番号	1	2	3	4	5	6
答	G	B	H	A	Y	M

初めに、 $y = f(x)$ を求める。

$f(x)$ は、 $i-1 \leq x \leq i$ において、

$$f(x) = A(x - (i-1))(x - i) \cdots \textcircled{1}$$

と表せる。ただし、 A は定数。また、

仮定より、 $y = f(x)$ の頂点は、

$$\left(\frac{i-1+i}{2}, \frac{i-1+i}{2} \right) \\ = \left(i - \frac{1}{2}, i - \frac{1}{2} \right) \cdots \textcircled{2}$$

である。よって、 $\textcircled{1}$ $\textcircled{2}$ より

$$i - \frac{1}{2} = A \left(i - \frac{1}{2} - (i-1) \right) \left(i - \frac{1}{2} - i \right)$$

$$\Leftrightarrow A = -4 \left(i - \frac{1}{2} \right) \cdots \textcircled{3}$$

よって、 $\textcircled{1}$ $\textcircled{3}$ より、 $f(x)$ は、

$$f(x) = -4 \left(i - \frac{1}{2} \right) (x - (i-1))(x - i) \\ (i-1 \leq x \leq i)$$

と決定した。

次に、題意の面積 S を計算する。

$$S = \sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i f(x) dx$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i -4 \left(i - \frac{1}{2} \right) (x - (i-1))(x - i) dx$$

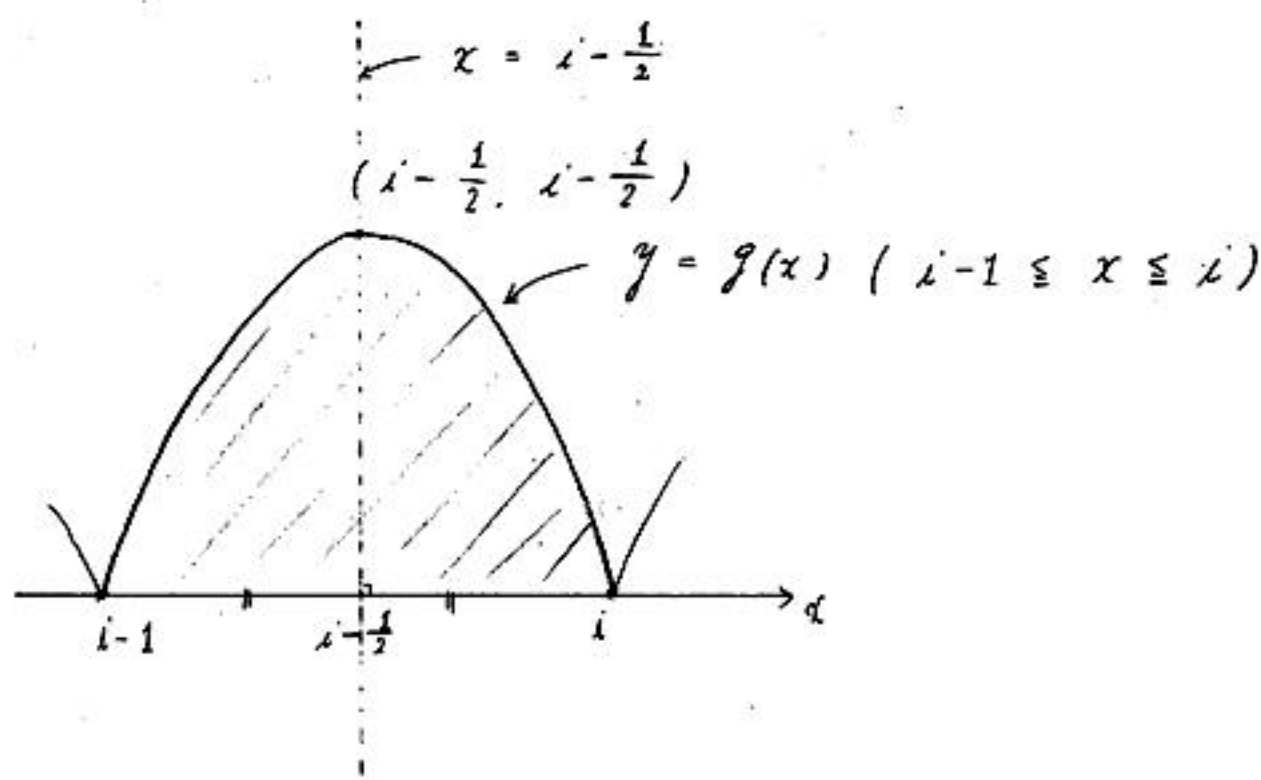
$$= \sum_{i=1}^n 4 \left(i - \frac{1}{2} \right) \int_{i-1}^i (x - (i-1))(i - x) dx$$

$$= \sum_{i=1}^n 4 \left(i - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{6} \left\{ i - (i-1) \right\}^3$$

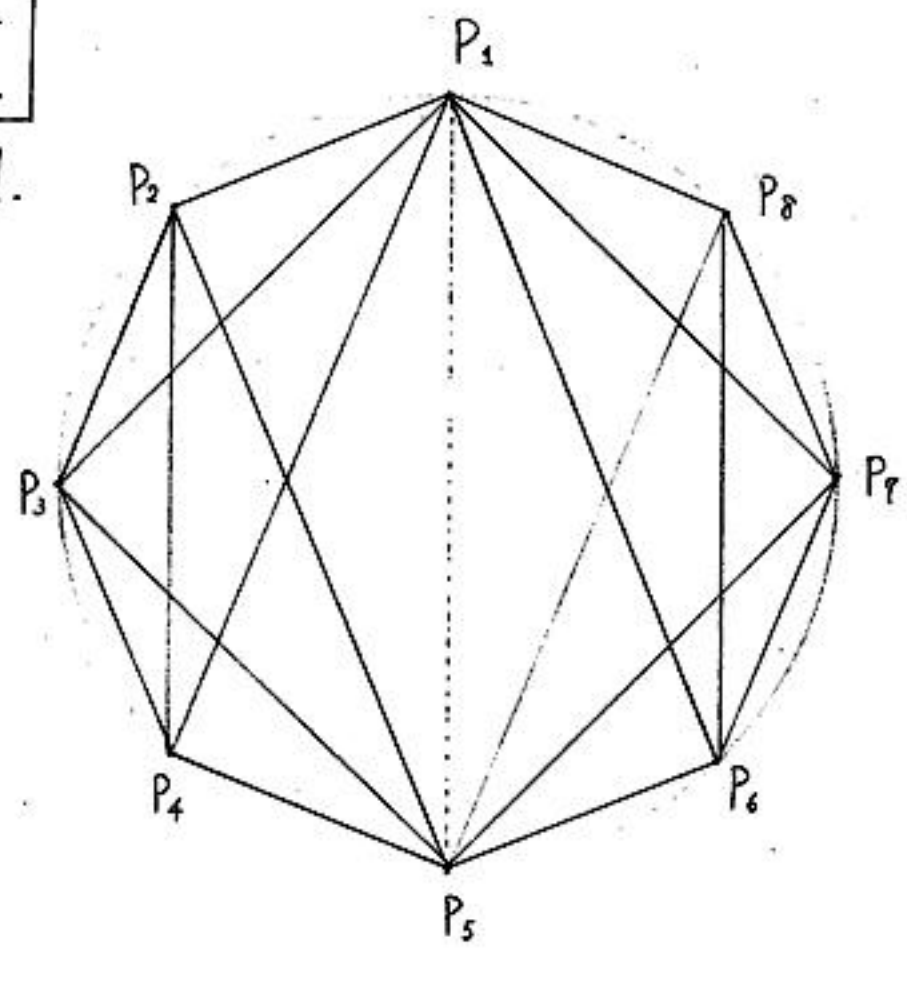
$$= \frac{2}{3} \sum_{i=1}^n \left(i - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{2}{3} \left\{ \frac{n}{2}(n+1) - \frac{n}{2} \right\}$$

$$= \frac{n^2}{3} \cdots \cdots \text{(答)}$$



1.



上図より、

10 通り ----- 答

2. 次の 3 通りの場合が考えられる

(I) 1 つの頂点から 3 本の対角線と

引く場合

6 通り

(II) 3 本の対角線で、3 角形が出来る場合

2 通り

(III) 3 本の対角線で、乙形の折れ線が、出

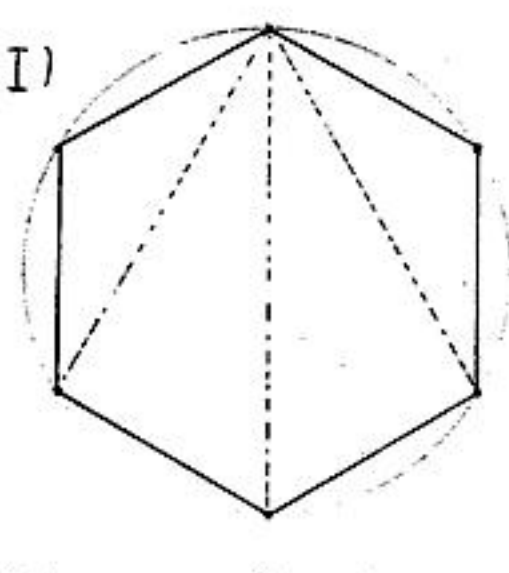
来る場合、

 $3 + 3$ $= 6$ [通り]

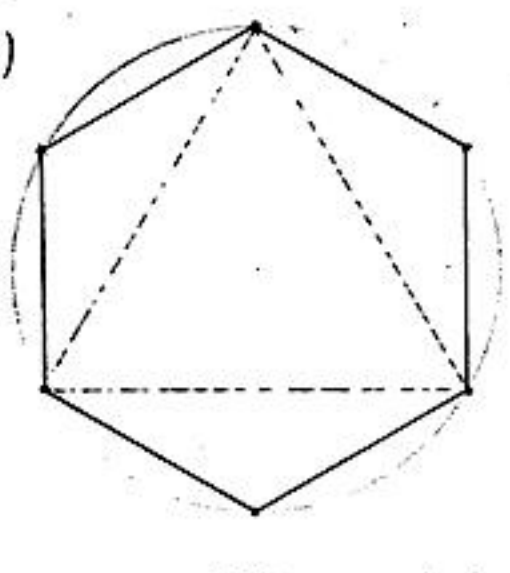
よ、7. 求める場合の数は、

 $6 + 2 + 6$ $= 14$ [通り]

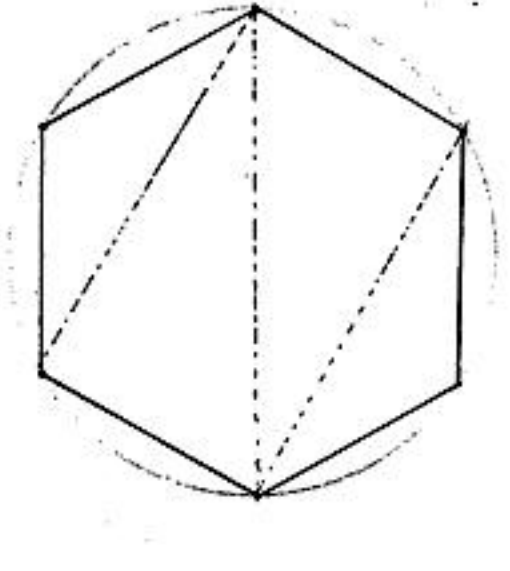
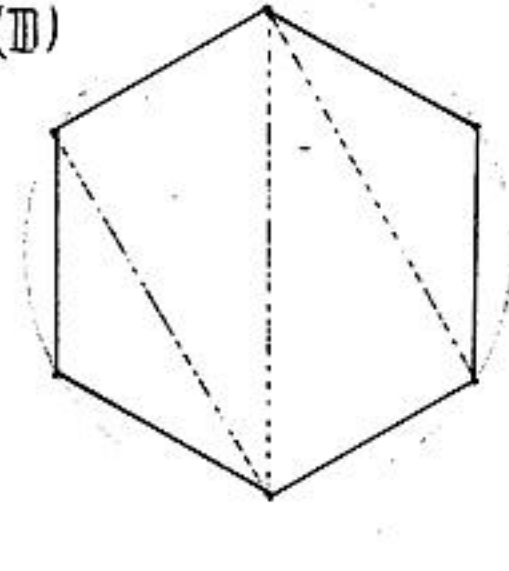
(I)



(II)



(III)

3. (H) $\Rightarrow k \leq n-3$ ----- (*)(*) が成立することと、 n についての数学的帰納法を用いて証明する。(i) $n=4$ の時、 C は、4 角形なので、(*) を満たす k は、 $k=1$

に限る。よ、7、

 $1 \leq 4-3$

よ、7、(*) は、確かに成立している。

(ii) $n=l$ の時、

(*) が成立すると仮定する。

(iii) $n=l+1$ の時、

帰納法の仮定より、 l 角形 C (以下では、 $C(l)$ と表す) は、 k 本の対角線により、 $(k+1)$ 個の領域に分割される。これらの $(k+1)$ 個のうちで、 $C(l)$ の辺を含む領域 D_i が存在する。 D_i のうちから、任意に 1 つを選び $\hat{D}_i$ と表すことにする。また、 $\hat{D}_i$ に含まれる $C(l)$ の辺の 1 つを $P_{i(n)}, P_{i(n)}$ と表す。

次に、両端を除く内弧 $\widehat{P_{i(n)} P_{i(n)}}$ 上に、 $P_{j(n)}$ を取る。必要ならば $P_j (1 \leq j \leq n)$ の添字 j を取り直しておく。また、 $\hat{D}_i$ と $P_{j(n)}$ を含む最小の凸多角形を $\hat{E}_i$ とおく。この時、 $\hat{E}_i$ は、頂点を 4 個以上持つ凸多角形なので、 $\hat{E}_i$ の内部を通る対角線が 1 本は存在する。したがって、帰納法の仮定より、 $C(l+1)$ には、互いに内部で交わらない $(k+1)$ 本の対角線が存在する。したがって、

$$k+1 \leq (l+1)-3$$

これは、 $n=l+1$ の時 (*) が成立することを示している。以上より、数学的帰納法の原理により、4 以上の任意の自然数 n について (*) の成立が証明された。 //

4. 記号は、前問の証明で表れたものを使う。証明すべき命題は、下記の通りである：

『(*) を満たす k 本の対角線により、 $C(n)$ は、3 角形領域に分割される。』

$$\Leftrightarrow k = n-3 \quad \text{----- (**)}$$

(**) の $(\Rightarrow)$ を n についての数学的帰納法を用いて証明する。(i) $n=4$ の時、 $C(4)$ は、4 角形なので、1 本の対角線により、 $C(4)$ は、3 角形に分割される。よ、7、

$$1 = 4-3$$

よ、7、(**) は、確かに成立している。

(ii) $n=l$ の時

(**) が成立すると仮定する。

(iii) $n=l+1$ の時、

帰納法の仮定により、 $C(l)$ は、 k 本の対角線により $(k+1)$ 個の 3 角形領域に分割されている。これらの $(k+1)$ 個の 3 角形領域のうちで、 $C(l)$ の辺を含む D_i が存在する。 D_i のうちから任意に 1