

I

番号	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
答	1	1	5	7	8	2

II

(1) $P_{k-1}, Q_{k-1}, Q_k, Q_k$ で囲まれる図形の面積を S_k とおく. 次に, $k = 1, 2, \dots, n$.

$$S_k = \frac{1}{2n} \left\{ \left(\frac{k-1}{n} \right)^4 + \left(\frac{k}{n} \right)^4 \right\}$$

この時、

$$S_n = \sum_{k=1}^n A_k$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n} \left\{ \left(\frac{k-1}{n} \right)^q + \left(\frac{k}{n} \right)^q \right\}$$

$$= \frac{1}{2n} \left\{ \left(\frac{1-1}{n} \right)^4 + \left[\sum_{k=2}^n \left(\frac{k-1}{n} \right)^4 \right] + \left(\frac{n}{n} \right)^4 - \left(\frac{n}{n} \right)^4 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^4 \right\}$$

$$= \frac{1}{2n} \left\{ \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^4 \right] - 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^4 \right\}$$

$$= \frac{1}{2n} \left\{ \left[2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^4 \right] - 1 \right\}$$

$$(2) \quad (k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$$

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{5} \left\{ \sum_{k=1}^n [(k+1)^5 - k^5] - \sum_{k=1}^n (10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) \right\}$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ (n+1)^5 - 1 \right\} - \frac{1}{5} \left\{ \frac{10}{4} n^2 (n+1)^2 + \frac{10}{6} n (n+1)(2n+1) + \frac{5}{2} n(n+1) + n \right\}$$

$$= \frac{1}{30} (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n)$$

$$= \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) \dots\dots (7)$$

$$(3) \quad S_n = \int_0^1 x^n dx$$

$$= \frac{1}{2n} \left\{ \left[2 \sum_{k=1}^n \frac{k^4}{n^4} \right] - 1 \right\} = \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 \quad \therefore (1)$$

$$= \frac{1}{2n} \left\{ 2 \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30} - 1 \right\} - \left(\frac{1}{5} - 0 \right)$$

$$= \frac{10n^3 - 1}{30n^4} > 0 \quad \therefore n \geq 2$$

したがって、

$$S_n = \int_0^1 x^n dx < \frac{1}{300}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10n^2 - 1}{30n^4} < \frac{1}{300}$$

$$\Leftrightarrow 0 < n^4 - 100n^2 + 10 \quad \therefore n \geq 2$$

$$\Leftrightarrow 2490 < (n^4 - 50)^2 \dots\dots (*)$$

(I) $2 \leq n \leq 7$ の場合

$$f(n) := (n^2 - 50)^2$$

$$= (50 - n^2)^2$$

17. 単調に減少する.

よ、[この場合は、

$$f(2) = 46^2 < 49^2 < 2490$$

よリ (*) 正成立 ことなる n は存在しない。

(II) $8 \leq n$ の場合

$$f(n) = (n^2 - 50)^2$$

に準調に増加する。

♩, 7.

$$f(9) = 31^2 < 2490 < 50^2 = f(10)$$

より、(*)と成立させる最小の n は、

$$\frac{10}{173} \dots\dots (2)$$

III

番号	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
答	4	3	4	9	2	8
番号	キ					
答	$\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma$					

IV

$$(1) y = e^x, y' = e^x$$

より、 $A(1, e^1)$ における接線の方程式は、

$$y - e^1 = e^1(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow y = e^1 x + e^1(-1 + 1) \dots\dots ①$$

$$\text{また、} y = \log x, y' = \frac{1}{x}$$

より、 $B(t, \log t)$ における接線の方程式は、

$$y - \log t = \frac{1}{t}(x - t)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{t}x + \log t - 1 \dots\dots ②$$

したがって、

① ② か、方程式と17. 同値である。

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^1 = \frac{1}{t} \\ e^1(-1 + 1) = \log t - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^1 = \frac{1}{t} \\ \frac{1}{t}[-(-\log t) + 1] = \log t - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^1 = \frac{1}{t} \\ t \log t - \log t - t - 1 = 0 \quad \because t > 1 \end{cases}$$

よって、

$$e^1 = \frac{1}{t}$$

$$A = B = C = -1 \dots\dots \text{答}$$

(2) $y = \log x$ のグラフは、上に凸であることから不等式：

$$x - 1 \leq \log x$$

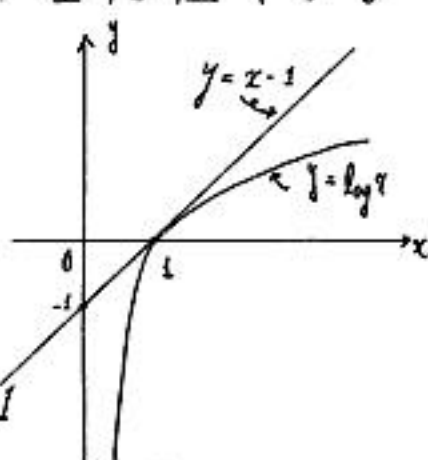
が成立する。

したがって、

$$\begin{aligned} f(x) &= x \log x - \log x - x + 1 \\ &\geq x \log x - (x - 1) - x + 1 \\ &= x(\log x - 2) \end{aligned}$$

よって、

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\log x - 2) = +\infty //$$



$$(3) f(x) = x \log x - \log x - x + 1 \quad (x \geq 1)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \log x + x \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x} - 1 \\ &= \log x - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

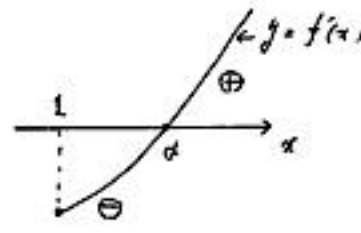
$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$$

よって、 $f'(x)$ は、単調増加関数である。

$$\cdot f'(1) = -1 < 0,$$

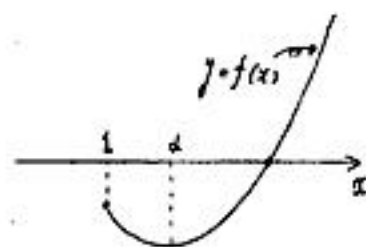
$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty,$$

$\cdot f'(x)$ は連続関数



に注意すると、 $f'(x) = 0$ となる $x > 1$ が唯一つ存在するこれを $x = d$ とおく。よって、 $f(x)$ の増減表は、次のようになる。

x	(1)	...	d	...
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$



$$f(d) = d \log d - \log d - d - 1$$

$$= d \cdot \frac{1}{d} - \frac{1}{d} - d - 1 \quad \because \begin{cases} f'(d) = 0 \\ \Leftrightarrow \log d - \frac{1}{d} = 0 \end{cases}$$

$$= -(d + \frac{1}{d}) < 0 \quad \because d > 1$$

したがって、増減表と(2)の結果と $f(x)$ の連続性から、方程式： $f(x) = 0$ の実数解が、 $x > 1$ の範囲に唯一つ存在する。 //

$$\begin{aligned} (4) f(e^{\frac{1}{2}}) &= e^{\frac{1}{2}} \log e^{\frac{1}{2}} - \log e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}} - 1 \\ &= \frac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}} - 5) < 0 \dots\dots ③ \end{aligned}$$

$$\therefore 0 < e^1 < (2.8)^{\frac{1}{2}} < 5^{\frac{1}{2}}$$

$$= 21.925$$

$$\Leftrightarrow 0 < e^{\frac{1}{2}} < (2.8)^{\frac{1}{2}} < 5 \dots\dots ④$$

また、

$$f(5) = 5 \log 5 - \log 5 - 5 - 1$$

$$= 4(\log 5 - \frac{3}{2})$$

$$= 4 \log \frac{5}{e^{\frac{3}{2}}} > 0 \dots\dots ⑤ \quad \therefore ④$$

したがって、③ ⑤ と(1)(3)より、

方程式： $f(x) = 0$ の実数解 $t(>1)$ は、

$$e^{\frac{1}{2}} < t < 5$$

を満たす。

$\Leftrightarrow$ l と C_2 の接点の x 座標 $t(>1)$ は、

$$e^{\frac{1}{2}} < t < 5$$

を満たす。 //