

【Ⅰ】 (1) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ より, $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ の整数部分を求めて, 引けばよい.

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 5 + 2\sqrt{6} = 5 + \sqrt{24}$$

ここで, $4 < \sqrt{24} < 5$ より, $9 < (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 < 10$

ゆえに

$$3 < \sqrt{3} + \sqrt{2} < \sqrt{10} < 4$$

よって, $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ の整数部分は 3 であるから,

$$a = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 3 \quad \dots\dots \text{①}$$

$$2a^2 + 12a + 7 = 2(a + 3)^2 - 11$$

ここで, ①より $(a + 3)^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$

よって

$$2a^2 + 12a + 7 = 2(5 + 2\sqrt{6}) - 11 = -1 + 4\sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \left(1 + \frac{1}{\tan \theta} + \frac{1}{\sin \theta}\right) \left(1 + \tan \theta - \frac{1}{\cos \theta}\right) \\ &= \left(1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin \theta}\right) \left(1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{1}{\cos \theta}\right) \\ &= \frac{\sin \theta + \cos \theta + 1}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin \theta + \cos \theta - 1}{\cos \theta} \\ &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1 + 2 \sin \theta \cos \theta - 1}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= 2 \end{aligned}$$

(3) 12 枚のカードをすべて区別するので, 求める組合せは,

$${}_{12}C_3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220 \text{ (通り)}$$

また, 数字 1 が書いてあるカード 2 枚と数字 3 が書いてあるカード 1 枚を取り出す確率は,

$$\frac{{}_3C_2 \cdot {}_4C_1}{{}_{12}C_3} = \frac{3 \times 4}{220} = \frac{3}{55}$$

(4) $y = 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1$ より,

$$y' = 9x^2 - 12x + 3 = 3(3x^2 - 4x + 1) = 3(3x - 1)(x - 1)$$

区間 $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{7}{6}$ における増減は以下のようになる.

x	$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		1		$\frac{7}{6}$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\frac{7}{9}$	$\nearrow$	$\frac{13}{9}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{79}{72}$

よって $x = \frac{1}{3}$ のとき 最大値 $\frac{13}{9}$, $x = -\frac{1}{3}$ のとき 最小値 $-\frac{7}{9}$

$$(5) \quad \overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b}, \quad |m| + |n| \leq 1$$

(i) $m \geq 0, n \geq 0$ のとき, $m + n \leq 1$ より
点 P は三角形 OAB の内部および周上を動く.

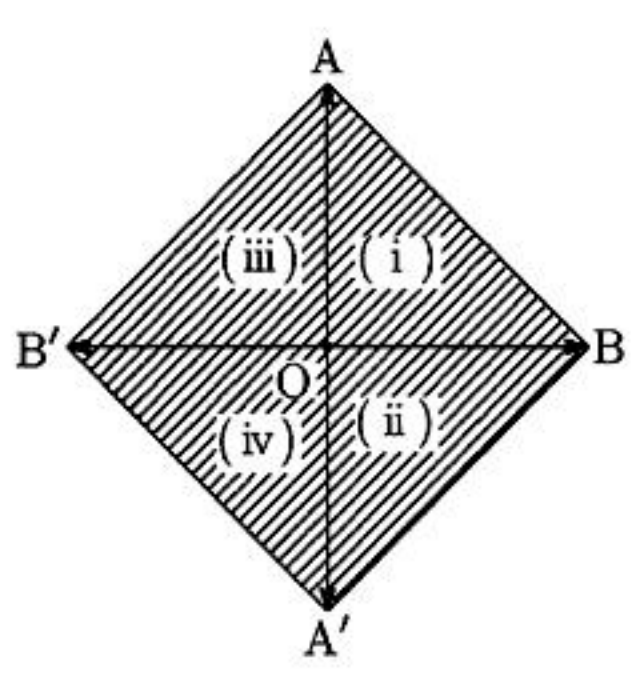
(ii) $m \leq 0, n \geq 0$ のとき, $-m + n \leq 1$
 $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{a'} = -\overrightarrow{a}$ とおいたとき, 点 P は
三角形 OA'B の内部及び周上を動く.

(iii) $m \geq 0, n \leq 0$ のとき, $m - n \leq 1$
 $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{b'} = -\overrightarrow{b}$ とおいたとき, 点 P は
三角形 OAB' の内部及び周上を動く.

(iv) $m \leq 0, n \leq 0$ のとき, $-m - n \leq 1$ より
点 P は三角形 OA'B' の内部および周上を動く.

(i)~(iv) を図示すると, 右の斜線部のようになる. よって求める面積は,

$$4 \cdot \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 2$$



(1)				(2)	(3)					
ア	イ	ウ	エ	ア	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
㊶	㊷	㊸	㊹	㊺	㊻	㊼	㊽	㊾	㊿	㊿

(4)					(5)
ア	イ	ウ	エ	オ	ア
㊶	㊷	㊸	㊹	㊺	㊻

〔Ⅱ〕 1 | 2, 3, 4 | 5, 6, 7, 8, 9 | 10, 11, …

(1) 第 k 群には $(2k-1)$ 個の数が含まれるので、第 $(n-1)$ 群の末尾の数は、

$$\sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) = (n-1)^2$$

である。よって、第 n 群の 1 番目の数 a_n は

$$a_n = (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$$

(2) 自然数 211 が第 k 群に含まれているとすると、211 は第 $(k-1)$ 群の末尾の数より大きく、第 k 群の末尾の数以下となるので、

$$(k-1)^2 < 211 \leq k^2$$

この不等式を満たすのは、 $k=15$ 。すなわち 211 は第 15 群の数である。

ここで (1) より、 $a_{15} = (15-1)^2 + 1 = 197$

よって 211 は第 15 群の $211 - 197 + 1 = 15$ (番目) の数である。

(3) 第 n 群の n 番目の数 b_n は、

$$b_n = a_n + (n-1) = n^2 - n + 1$$

(4) (3) より、数列 $\{b_n\}$ の第 n 項までの和 S_n は、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n b_k \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2} n(n+1) + n \\ &= \frac{1}{3} n^3 + \frac{2}{3} n \end{aligned}$$

(1)			(2)				(3)			(4)			
ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
Ⓐ	Ⓒ	Ⓒ	Ⓐ	Ⓔ	Ⓐ	Ⓔ	Ⓐ	Ⓐ	Ⓐ	Ⓐ	Ⓓ	Ⓒ	Ⓓ

【Ⅲ】(1)

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\} dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)x^2 + \alpha\beta x \right]_{\alpha}^{\beta} \\
 &= \frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3) - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)(\beta^2 - \alpha^2) + \alpha\beta(\beta - \alpha) \\
 &= (\beta - \alpha) \left\{ \frac{1}{3}(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2) - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2 + \alpha\beta \right\} \\
 &= (\beta - \alpha) \left(-\frac{1}{6}\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha\beta - \frac{1}{6}\beta^2 \right) \\
 &= (\beta - \alpha) \cdot \left\{ -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^2 \right\} \\
 &= -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

(2) $y' = 2ax$ より, C_1 上の点 $P(s, as^2 + b)$ における接線 l の方程式は,

$$y - (as^2 + b) = 2as(x - s)$$

すなわち $y = 2asx - as^2 + b$

(3) l と C_0 の交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと,

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\alpha}^{\beta} (2asx - as^2 + b - ax^2) dx \\
 &= \frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3
 \end{aligned}$$

ここで, $2asx - as^2 + b = ax^2$

すなわち $ax^2 - 2asx + as^2 - b = 0$

において, 解と係数の関係より,

$$\alpha + \beta = 2s$$

$$\alpha\beta = s^2 - \frac{b}{a}$$

よって

$$\begin{aligned}
 (\beta - \alpha)^3 &= \{(\beta - \alpha)^2\}^{\frac{3}{2}} \\
 &= \{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}} \\
 &= \left\{ (2s)^2 - 4\left(s^2 - \frac{b}{a}\right) \right\}^{\frac{3}{2}} \\
 &= \left(\frac{4b}{a} \right)^{\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

すなわち

$$S = \frac{a}{6} \left(\frac{4b}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \dots\dots \quad \textcircled{1}$$

よって S は s の値に依存しないので, P の位置に関わらず一定である.

(4) ①に $a = t^3$, $b = t^2 + 3t + 2$ を代入すると,

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{t^3}{6} \left\{ \frac{4(t^2 + 3t + 2)}{t^3} \right\}^{\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{4}{3} \left(\frac{t^2 + 3t + 2}{t} \right)^{\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{4}{3} \left(t + 3 + \frac{2}{t} \right)^{\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

ここで $t > 0$ より 相加平均 $\geq$ 相乗平均 を用いると, $t + \frac{2}{t} \geq 2\sqrt{2}$

等号成立は, $t = \frac{2}{t}$ のとき, すなわち $t = \sqrt{2}$ のとき.

よって

$$\begin{aligned}
 S &\geq \frac{4}{3} (3 + 2\sqrt{2})^{\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{4}{3} \{(\sqrt{2} + 1)^2\}^{\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{4}{3} (5\sqrt{2} + 7)
 \end{aligned}$$

すなわち S は $t = \sqrt{2}$ のとき最小値 $\frac{4}{3} (5\sqrt{2} + 7)$ をとる.

