

[I] (1)

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{i=1}^{20} (x+i)(x+i+1) \\&= x^2 \sum_{i=1}^{20} 1 + x \left\{ 2 \sum_{i=1}^{20} i + \sum_{i=1}^{20} 1 \right\} + \sum_{i=1}^{20} i^2 + \sum_{i=1}^{20} i \\&= 20x^2 + x \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 + 20 \right) + \frac{1}{6} \cdot 20 \cdot 21 \cdot 41 + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 \\&= 20x^2 + 440x + 3080\end{aligned}$$

(2) $\log_2 x < 5$

真数条件より $x > 0$ であるから,

$$\log_2 x < 5 \iff 0 < x < 2^5 = 32$$

よって, この不等式を満たす整数 x の個数は 31(個)

$\log_2 y < z < 10$

上と同様に $y > 0$ であるから, z は $0 < z < 10$ を満たす整数値をとる.
各 z に対し, $2^z - 1$ (個) の y が存在するので,

$$\sum_{z=1}^9 (2^z - 1) = \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 9 = 2^{10} - 11 = 1013$$

よって, 求める (y, z) の組は全部で 1013(組) ある.

(3) 7 戦目に優勝者が決まる勝敗パターンは, 6 戦目まで 3 勝 3 敗で, 7 戦目で A が勝つか, B が勝つかの場合であるから,

$${}_6C_3 \times 2 = 40 \text{ (通り)}$$

その確率は, A, B いずれが勝つ確率も $\frac{1}{2}$ であるから,

$$40 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{5}{16}$$

[Ⅱ]

(1)

$$\begin{aligned}\Delta OPQ &= \frac{1}{2} |\vec{OP}| |\vec{OQ}| \sin \angle POQ \\ &= \frac{3}{2} \sin \angle POQ\end{aligned}$$

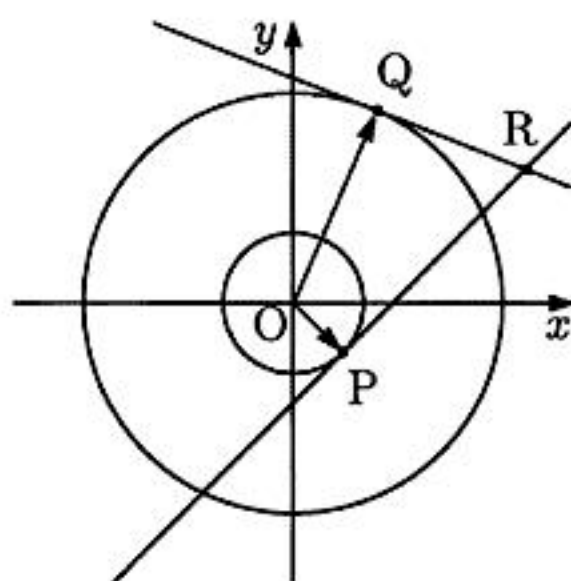
より, ΔOPQ の面積が最大となるのは,
 $\angle POQ = 90^\circ$ となるときである. このとき
 四角形 $OPRQ$ は長方形となり,

$$OR = \sqrt{OP^2 + OQ^2} = \sqrt{10}$$

よって, 点 R は

$$\text{円} : x^2 + y^2 = 10$$

上にある.

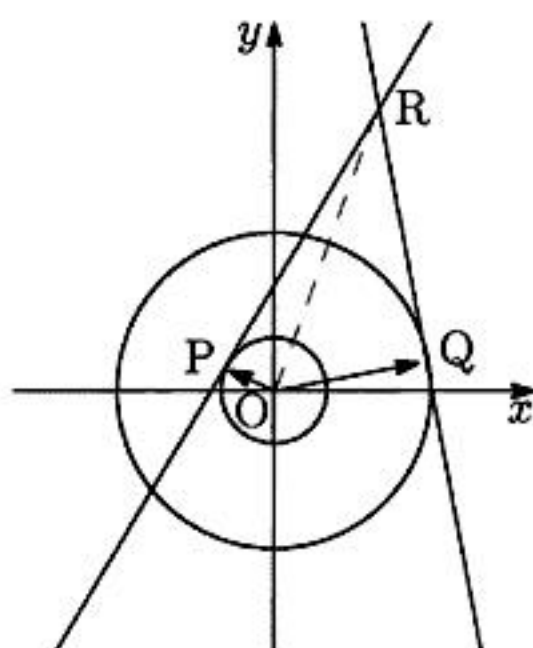
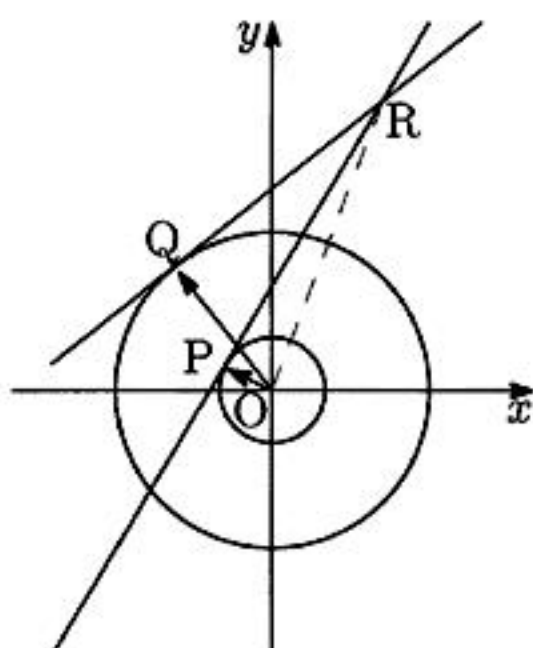


$$(2) |\vec{OR}| = 5, |\vec{PR}| = \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6}$$

$$\vec{OP} \cdot \vec{OR} = |\vec{OP}| |\vec{OR}| \cos \angle POR = 1 \cdot 5 \cdot \frac{1}{5} = 1$$

$$\vec{OR} \cdot \vec{PR} = |\vec{OR}| |\vec{PR}| \cos \angle PRO = 5 \cdot 2\sqrt{6} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 24$$

(3) $\vec{OP} \cdot \vec{OQ}$ を考える場合, 以下の図のように 2 通りが考えられる.



いずれの図においても, $\angle QOR = 60^\circ$ より

$$|\vec{OR}| = 2|\vec{OQ}| = 6$$

よって, 点 R は円 $: x^2 + y^2 = 36$ 上にある.

また

$$\cos \angle POR = \frac{|\vec{OP}|}{|\vec{OR}|} = \frac{1}{6}$$

$\angle POQ$ は左図のように $\angle POR - 60^\circ$ となる場合と, 右図のように
 $\angle POR + 60^\circ$ となる場合があるので,

$$\begin{aligned}\vec{OP} \cdot \vec{OQ} &= |\vec{OP}| |\vec{OQ}| \cos \angle POQ \\ &= 1 \cdot 3 \cdot \cos(\angle POR \mp 60^\circ) \\ &= 3 (\cos \angle POR \cos 60^\circ \pm \sin \angle POR \sin 60^\circ) \\ &= 3 \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{35}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{105}}{4}\end{aligned}$$

【Ⅲ】 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$ とおくと, $f'(x) = 3x^2 + 6x - 2$

(1) $f'(0) = -2$ であるから, $(0, -6)$ における接線の方程式は,

$$y - (-6) = -2x \quad \text{すなわち} \quad y = -2x - 6$$

(2) $(t, f(t))$ における接線の方程式は,

$$y - (t^3 + 3t^2 - 2t - 6) = (3t^2 + 6t - 2)(x - t) \quad \dots\dots (*)$$

これが $(0, -6)$ を通るので

$$-6 - t^3 - 3t^2 + 2t + 6 = -3t^3 - 6t^2 + 2t$$

$$2t^3 + 3t^2 = 0$$

$$t^2(2t + 3) = 0$$

$t \neq 0$ であるから, $t = -\frac{3}{2}$

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{8}$, $f'\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{17}{4}$ であるから, 求める接線の方程式は,

$$y - \frac{3}{8} = -\frac{17}{4}\left(x + \frac{3}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{17}{4}x - 6$$

(3) $(t, f(t))$ における接線が $(0, a)$ を通るとき,

$$a - (t^3 + 3t^2 - 2t - 6) = -3t^3 - 6t^2 + 2t$$

$$\iff a = -2t^3 - 3t^2 - 6 \quad \dots\dots (**)$$

(**) の右辺を $g(t)$ とおいたとき, $y = g(t)$ と $y = a$ が 3 交点をもてばよい.

$g'(t) = -6t^2 - 6t = -6t(t + 1)$ より増減表は以下のようなになる.

t	...	-1	...	0	...
$g'(t)$	-	0	+	0	-
$g(t)$	$\searrow$	-7	$\nearrow$	-6	$\searrow$

よって, 求める a の範囲は $-7 < a < -6$