

〔Ⅰ〕

〔解答〕

- 1 (1) J (2) H
 2 (3) C (4) R
 3 (5) A (6) F

〔解説〕

1.
 $2^x = t$ とおくと、 $x \leq 3$ より、 $0 < t \leq 8$ である。

$$2^{3x+1} - 15 \cdot 2^{2x} + 3 \cdot 2^{x+3} = 2t^3 - 15t^2 + 24t$$

$$= f(t)$$

とおく。

$$f'(t) = 6t^2 - 30t + 24$$

$$= 6(t-1)(t-4)$$

となる。したがって、増減表は以下のようになる。

t	0	⋯	1	⋯	4	⋯	8
$f'(t)$		+	0	-	0	+	
$f(t)$	(0)	↗	11	↘	-16	↗	256

よって、 $f(t)$ が最大となるのは、 $t=8$ のとき、すなわち $x=3$ のときである。また、 $f(t)$ が最小となるのは、 $t=4$ のとき、すなわち $x=2$ のときである。

2.

$0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ のとき、 $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ) \neq 0$ 、 $\cos \theta \neq 0$ 、 $\tan \theta \geq 0$ である。

$$\frac{3 - (5 + \sqrt{3}) \cos^2 \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = -\sqrt{3} \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow 3 - (5 + \sqrt{3}) \cos^2 \theta = -\sqrt{3} \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)$$

$$\Leftrightarrow 3 - 5 \cos^2 \theta = -\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\cos^2 \theta} - 5 = -\sqrt{3} \tan \theta (\because \cos \theta \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 3(1 + \tan^2 \theta) - 5 = -\sqrt{3} \tan \theta$$

$$\Leftrightarrow 3 \tan^2 \theta + \sqrt{3} \tan \theta - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} \tan \theta - 1)(\sqrt{3} \tan \theta + 2) = 0$$

となる。 $\tan \theta \geq 0$ であるから $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 、 $\theta = 30^\circ$ となる。

3.

$$f(x) = x(x-a) - b(x-1)^2$$

$$= (1-b)x^2 - (a-2b)x - b$$

である。 $1-b$ の符号で場合分けする。

[1] $1-b > 0 \Leftrightarrow b < 1$ のとき

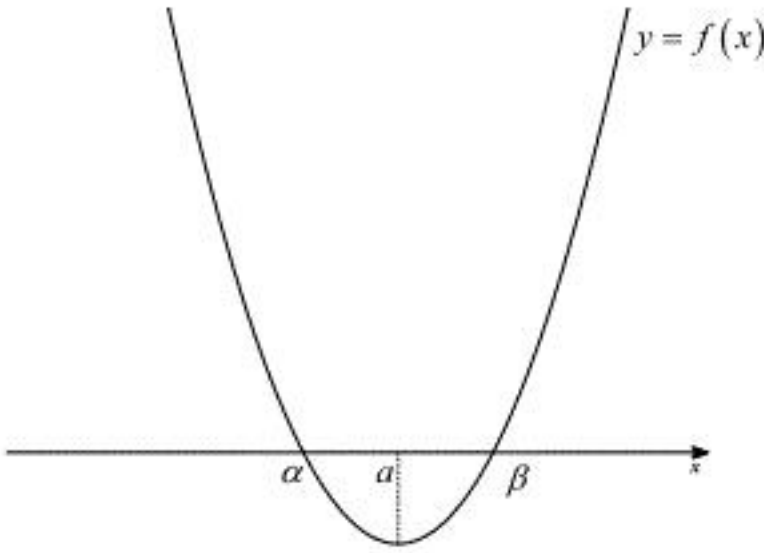


図 1

図 1 より、 $\alpha < a < \beta$ のとき、

$$f(a) = -b(a-1)^2 < 0$$

となり、 $b > 0$ 、すなわち $0 < b < 1$ であることが必要である。逆に $0 < b < 1$ のとき、 $f(x) = 0$ は 2 解をもち、 $\alpha < a < \beta$ となる。

[2] $1-b < 0 \Leftrightarrow b > 1$ のとき

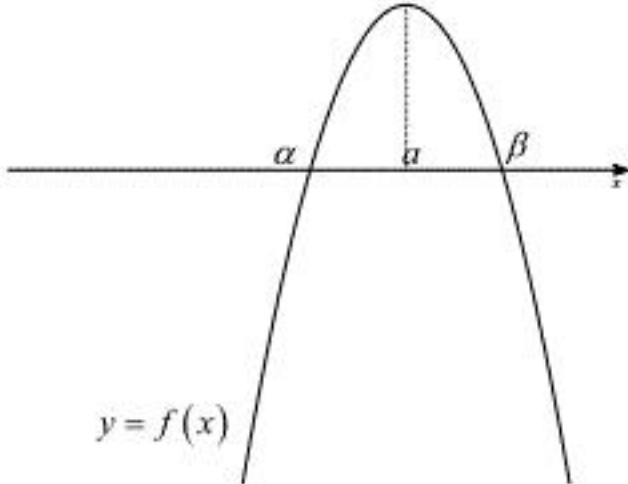


図 2

図 2 より、 $\alpha < a < \beta$ のとき、

$$f(a) = -b(a-1)^2 > 0$$

となり、 $b < 0$ となる必要があるが、 $b > 1$ かつ $b < 0$ を満たすような実数 b は存在しない。
 [1], [2] より、求める必要十分条件は $0 < b < 1$ である。

〔Ⅱ〕

1.

サイコロを1回ふったとき、 $f(n)=2$ となるのは、4の目が出たときのみである。よって求める確率は $\frac{1}{6}$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{6}$$

2.

サイコロを1回ふったとき、どの目が出る確率も $\frac{1}{6}$ で等しい。よって求める期待値は、

$$(\log_3 1 + \log_2 2 + \log_3 3 + \log_2 4 + \log_3 5 + \log_2 6) \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} (5 + \log_2 3 + \log_3 5)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{6} (5 + \log_2 3 + \log_3 5)$$

3.

$2 + \log_2 3 = \log_2 12$ であるから、サイコロの目の積が12となる確率を求めればよい。出る目の組が $(2, 6), (3, 4)$ で、それぞれ2通りずつある。よって求める確率は $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{9}$$

4.

$1 \leq m \cdot n \leq 36$ で $f(m \cdot n)$ が整数となる $m \cdot n$ の組み合わせを $m \cdot n$ の偶奇により場合分けをする。

[1] $m \cdot n$ が奇数かつ $f(m \cdot n)$ が整数となるのは、 $m \cdot n = 1, 3, 9, 27$ のときである。

$m \cdot n = 1$ となるのは、出た目の組が $(1, 1)$ で1通りである。

$m \cdot n = 3$ となるのは、出た目の組が $(1, 3)$ で2通りである。

$m \cdot n = 9$ となるのは、出た目の組が $(3, 3)$ で1通りである。

$m \cdot n = 27$ となる目の出方はない。

以上4通りである。

[2] $m \cdot n$ が偶数かつ $f(m \cdot n)$ が整数となるのは、 $m \cdot n = 2, 4, 8, 16, 32$ である。

$m \cdot n = 2$ となるのは、出た目の組が $(1, 2)$ で2通りである。

$m \cdot n = 4$ となるのは、出た目の組が $(1, 4), (2, 2)$ で3通りである。

$m \cdot n = 8$ となるのは、出た目の組が $(2, 4)$ で2通りである。

$m \cdot n = 16$ となるのは、出た目の組が $(4, 4)$ で1通りである。

$m \cdot n = 32$ となる目の出方はない。

以上8通りである。

以上[1], [2]より、求める確率は $\frac{4+8}{36} = \frac{1}{3}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{3}$$

〔Ⅲ〕

1.
(1)
ア 1 イ 3 ウ 3 エ 1 オ 1 カ 9

0 個の要素を持つ S の部分集合は、空集合 $\emptyset$ の 1 個である。

1 個の要素を持つ S の部分集合は、 $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ の 3 個である。

2 個の要素を持つ S の部分集合は、 $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}$ の 3 個である。

3 個の要素を持つ S の部分集合は、 $\{1, 2, 3\}$ の 1 個である。

また、部分集合 B の要素の個数を k とすると、 B の真部分集合の個数は B 自身を除く $2^k - 1$ 個ある。

[1] $k=1$ のとき

$B = \{1\}, \{2\}, \{3\}$ より $2^1 - 1 = 1$ で 1 個である。

[2] $k=2$

$B = \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}$ より $2^2 - 1 = 3$ で 3 個である。

[3] $k=3$

$B = \{1, 2, 3\}$ より $2^3 - 1 = 7$ で 7 個である。

以上[1], [2], [3]より、題意の条件を満たす A, B の組み合わせは

$$1 \times 3 + 3 \times 3 + 7 \times 1 = 19$$

である。

(2)

$A \not\subset B$ かつ $B \not\subset A$ となる場合の数を A, B のそれぞれの要素の個数で場合分けして考える。

[1] A と B の要素の個数(これを k とおく)が等しい場合は $A \neq B$ であればよい。

$k=1$ のときは $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ のうち 2 つ選び、それぞれを A, B どちらかに割り当てるか 2 通りある。よって

$${}_3C_2 \times 2 = 6$$

より 6 通りである。

$k=2$ のときは $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}$ のうち 2 つ選び、それぞれを A, B どちらかに割り当てるか 2 通りある。よって

$${}_3C_2 \times 2 = 6$$

より 6 通りである。

[2] A と B の要素の個数が異なる場合

一方の要素の個数が 1 個、他方の集合の要素が 2 個であり、それらの要素がいずれも異なっている場合である。この場合は

$$2 \times 3 = 6$$

より 6 通りである。

以上[1], [2]より求める A, B の組み合わせは 18 通りである。

(答) 18 通り

2.

B の要素の個数を k として、1.(1)の後半と同様に解く。

$k=1$ のとき、 B の真部分集合の個数は各 $2^1 - 1 = 1$ であるから、 $1 \times {}_5C_1 = 5$ で 5 通りである。

$k=2$ のとき、 B の真部分集合の個数は各 $2^2 - 1 = 3$ であるから、 $3 \times {}_5C_2 = 30$ で 30 通りである。

$k=3$ のとき、 B の真部分集合の個数は各 $2^3 - 1 = 7$ であるから、 $7 \times {}_5C_3 = 70$ で 70 通りである。

$k=4$ のとき、 B の真部分集合の個数は各 $2^4 - 1 = 15$ であるから、 $15 \times {}_5C_4 = 75$ で 75 通りである。

$k=5$ のとき、 B の真部分集合の個数は各 $2^5 - 1 = 31$ であるから、 $31 \times {}_5C_5 = 31$ で 31 通りである。

以上より、

$$a_5 = 5 + 30 + 70 + 75 + 31 = 211$$

となる。

(答) $a_5 = 211$