

【I】

【解答】

(1) ☐ア 4 ☐イ 3 (2) ☐ウ 1 ☐エ 3 ☐オ 5

(3) ☐カ 2 ☐キ 3 (4) ☐ク ④ ☐ケ ①

【解説】

(1)

$$\int_1^2 f(t) dt = A, \int_0^3 g(t) dt = B \text{ とおくと,}$$

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 2B$$

$$g(x) = x^2 - 4x + A$$

と表すことができる。よって,

$$A = \int_1^2 f(t) dt = \int_1^2 (3t^2 + 2t - 2B) dt = \left[t^3 + t^2 - 2Bt \right]_1^2 = -2B + 10 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$B = \int_0^3 g(t) dt = \int_0^3 (t^2 - 4t + A) dt = \left[\frac{1}{3} t^3 - 2t^2 + At \right]_0^3 = 3A - 9 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。①, ②より,

$$\begin{cases} A = -2B + 10 \\ B = 3A - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \int_1^2 f(t) dt = 4 \\ B = \int_0^3 g(t) dt = 3 \end{cases}$$

である。

(2)

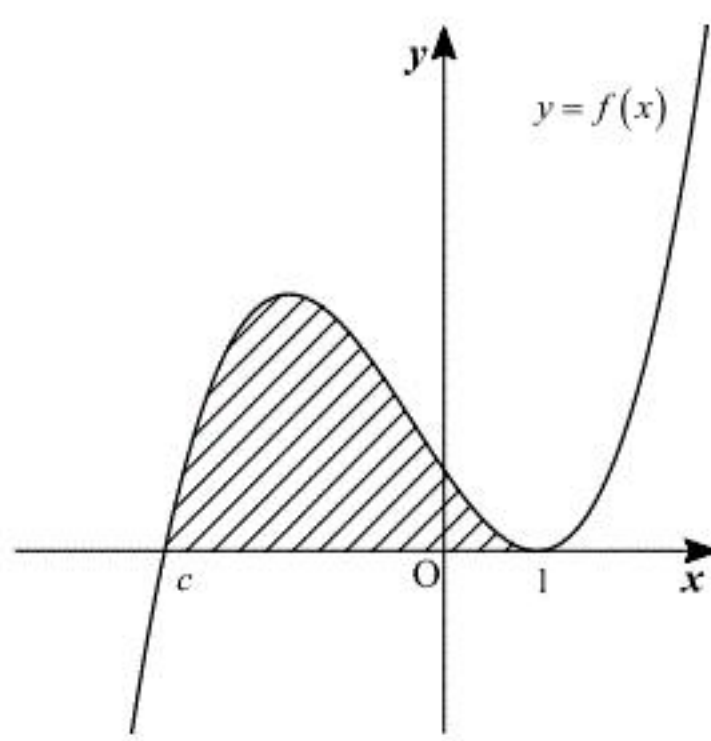
方程式 $f(x) = 0$ は $x = 1$ を重解にもち, かつ $c \neq 1$ だから

$$f(x) = (x-1)^2 (x-c)$$

と表すことができる。

[1] $c < 1$ のとき

面積 S は下図の斜線部分である。



よって,

$$\begin{aligned} S &= \int_c^1 (x-1)^2 (x-c) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} (x-1)^3 (x-c) \right]_c^1 - \int_c^1 \left\{ \frac{1}{3} (x-1)^3 \right\} dx \\ &= - \left[\frac{1}{12} (x-1)^4 \right]_c^1 \\ &= \frac{1}{12} (c-1)^4 \end{aligned}$$

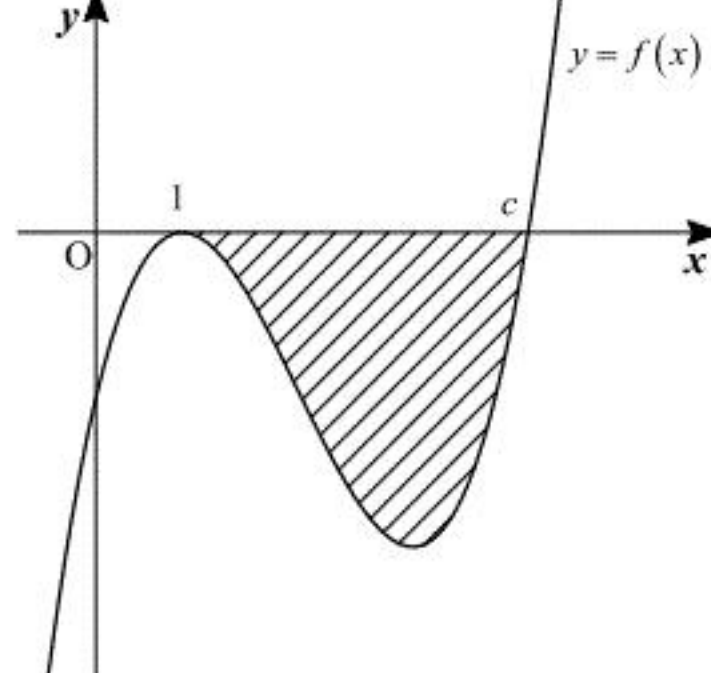
である。 $S = \frac{64}{3}$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} (c-1)^4 &= \frac{64}{3} \\ \Leftrightarrow (c-1)^4 &= 4^4 \\ \Leftrightarrow (c-1)^2 &= 4^2 \left(\because (c-1)^2 > 0 \right) \\ \Leftrightarrow c-1 &= \pm 4 \end{aligned}$$

と変形でき, 条件 $c < 1$ に注意すると $c = -3$ であることがわかる。

[2] $c > 1$ のとき

面積 S は下図の斜線部分である。



よって

$$\begin{aligned} S &= - \int_1^c (x-1)^2 (x-c) dx \\ &= \int_c^1 (x-1)^2 (x-c) dx \end{aligned}$$

であるから, [1] のときと同様に変形すれば, $S = \frac{64}{3}$ のとき

$$c-1 = \pm 4$$

が得られる。条件 $c > 1$ に注意すると $c = 5$ であることがわかる。

以上[1], [2]から $c = -3, 5$ である。

(3)

$\log x = t$ とおくと,

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{x} dx & = & dt \\ \hline x & \frac{1}{e} & \rightarrow e \\ t & -1 & \rightarrow 1 \end{array}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{(\log x)^2}{x} dx &= \int_{-1}^1 t^2 dt \\ &= \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。

(4)

(a)

点 $(3, 0)$ と直線 $x + y - 5 = 0$ との距離は

$$\frac{|3+0-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}$$

である。

(b)

$|x-2|+|y|=3 \Leftrightarrow |x-2|+|-y|=3$ より, $|x-2|+|y|=3$ のグラフは x 軸対称である。

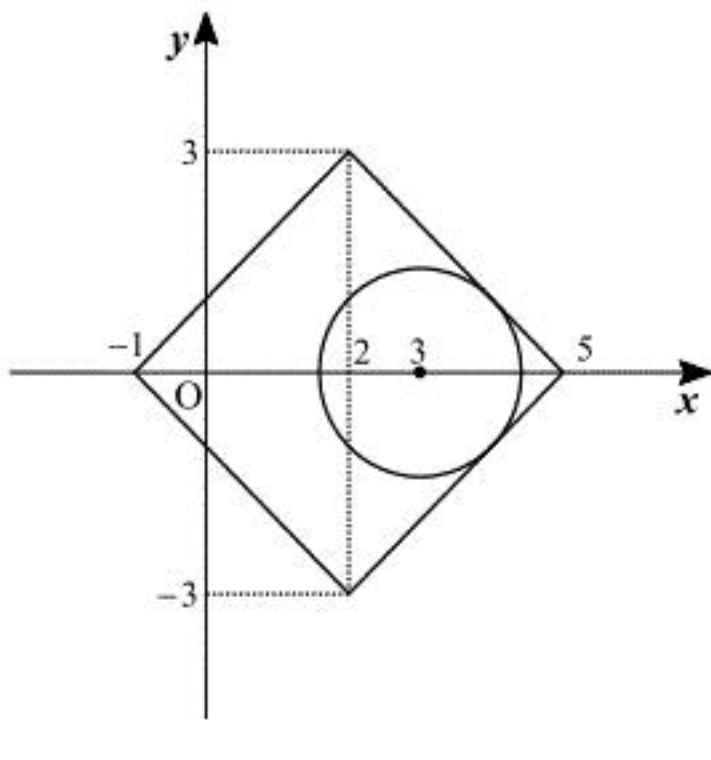
よって, $y \geq 0$ の範囲で考えると, $|x-2|+|y|=3$ は,

$$x \geq 2 \text{ のとき, } y = -x + 5$$

$$x \leq 2 \text{ のとき, } y = x + 1$$

である。また, (a) の結果より, 円 $(x-3)^2 + y^2 = 2$ は直線 $y = -x + 5$ に接する。以上を総合

して, $(x-3)^2 + y^2 = 2$ と $|x-2|+|y|=3$ のグラフは下図のようになる。



$(x-3)^2 + y^2 \leq 2$ は上図の円およびその内部の領域を表し, $|x-2|+|y| \leq 3$ は上図の正方形およびその内部の領域を表す。よって命題「 $(x-3)^2 + y^2 \leq 2 \Rightarrow |x-2|+|y| \leq 3$ 」は真

であるが, 命題「 $(x-3)^2 + y^2 \leq 2 \Leftarrow |x-2|+|y| \leq 3$ 」は偽である。

したがって, $(x-3)^2 + y^2 \leq 2$ であることは, $|x-2|+|y| \leq 3$ であるための十分条件である

が, 必要条件ではない。

【II】

〔解答〕

$$(1) \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ア} & 0 & 0 & 8 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{イ} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ウ} & 2n \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{エ} & n(4n+a-4) \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{オ} & 4n \\ \hline \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{カ} & 9 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{キ} & 191 \\ \hline \end{array}$$

〔解説〕

(1)

$$B = A - E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より,

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と求まる。

(2)

(1)より $B^3 = O$ であるから、3以上の自然数 n に対して $B^n = O$ である。このことに注意すると、二項定理より

$$\begin{aligned} A^n &= (E + B)^n \\ &= {}_n C_0 E^n + {}_n C_1 E^{n-1} B + {}_n C_2 E^{n-2} B^2 + {}_n C_3 E^{n-3} B^3 + \cdots + {}_n C_n B^n \\ &= {}_n C_0 E^n + {}_n C_1 B + {}_n C_2 B^2 + O + \cdots + O \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & n(4n+a-4) \\ 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求まる（これはすべての自然数 n に対して成り立つ）。

(3)

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 18 & 2007 \\ 0 & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ となるのは, (2) より}$$

$$\begin{cases} 2n = 18 \\ n(4n+a-4) = 2007 \\ 4n = 36 \end{cases}$$

という3式が同時に成り立つとき、すなわち $n=9, a=191$ のときである。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

$$(1) \quad \boxed{\text{ア}} \quad 72 \quad (2) \quad \boxed{\text{イ}} \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$(3) \quad \boxed{\text{ウ}} \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad (4) \quad \boxed{\text{エ}} \quad \frac{-5+5\sqrt{5}}{2}$$

〔解説〕

(1)

$\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形であるから

$$\angle ABC = \angle ACB = \theta$$

$$\angle BAC = 180^\circ - 2\theta$$

である。また、 $\triangle PAC$ は $PA=PC$ の二等辺三角形であるから

$$\angle PAC = \angle PCA = 180^\circ - 2\theta$$

である。三角形の外角はそれととなり合わない2つの内角の和に等しいので

$$\angle BPC = \angle PAC + \angle PCA$$

$$= 360^\circ - 4\theta$$

である。ここで、 $\triangle CBP$ が $CB=CP$ の二等辺三角形であることを考えると

$$\angle BPC = \theta$$

と表わすこともできる。以上より

$$360^\circ - 4\theta = \theta \Leftrightarrow \theta = 72^\circ$$

である。

(2)

$AP=PC=CB=x$ とおくと、 $BP=1-x$ である。 $\triangle ABC \sim \triangle CBP$ であるので

$$1:x = x:(1-x)$$

$$\Leftrightarrow 1-x = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

である。 $x > 0$ に注意すれば $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ より、 $BC = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ である。

(3)

頂点 A から辺 BC に垂線 AH を引くと

$$BH = \frac{1}{2}BC = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

である。よって

$$\cos \theta = \frac{BH}{AB} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

と求まる。

(4)

半径 r の円に内接する正20角形を20個の二等辺三角形に分割する。1つの二等辺三角形に対して、その頂角の大きさは

$$360^\circ \div 20 = 18^\circ$$

であり、面積は

$$\frac{1}{2}r^2 \sin 18^\circ = \frac{1}{2}r^2 \sin (90^\circ - 72^\circ)$$

$$= \frac{1}{2}r^2 \cos 72^\circ$$

$$= \frac{-1+\sqrt{5}}{8}r^2$$

である。よって

$$S = 20 \times \frac{-1+\sqrt{5}}{8}r^2$$

$$= \frac{-5+5\sqrt{5}}{2}r^2$$

と求まる。

[IV]

(1)

$g(x) = e^x f(x)$ とおくと,

$$\begin{aligned} g'(x) &= (e^x)' f(x) + e^x f'(x) \\ &= e^x \{f(x) + f'(x)\} \\ &= e^x \cdot 4xe^{-x} \sin 2x \\ &= 4x \sin 2x \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

$g'(x) = 4x \sin 2x$ より,

$$\begin{aligned} g(x) &= \int g'(x) dx \\ &= \int 4x \sin 2x dx \\ &= 4x \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) - \int 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) dx \\ &= -2x \cos 2x + 2 \int \cos 2x dx \\ &= -2x \cos 2x + \sin 2x + C \end{aligned}$$

である。ただし C は積分定数である。ここで, $g(0) = e^0 f(0) = 0$ であるから,

$$-2 \cdot 0 \cdot \cos 0 + \sin 0 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0$$

と求まる。よって,

$$\begin{aligned} g(x) &= -2x \cos 2x + \sin 2x \\ \therefore f(x) &= e^{-x} (-2x \cos 2x + \sin 2x) \end{aligned}$$

である。

(答) $f(x) = e^{-x} (-2x \cos 2x + \sin 2x)$

(3)

(a)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{-k\pi} &= \frac{e^{-\pi} \{1 - (e^{-\pi})^n\}}{1 - e^{-\pi}} \\ &= \frac{1 - e^{-n\pi}}{e^{\pi} - 1} \end{aligned}$$

である。

(答) $\sum_{k=1}^n e^{-k\pi} = \frac{1 - e^{-n\pi}}{e^{\pi} - 1}$

(b)

$S = \sum_{k=1}^n k e^{-k\pi}$ とおく。

$$\begin{aligned} S &= e^{-\pi} + 2e^{-2\pi} + 3e^{-3\pi} + \cdots + ne^{-n\pi} \\ e^{-\pi} S &= e^{-2\pi} + 2e^{-3\pi} + \cdots + (n-1)e^{-n\pi} + ne^{-(n+1)\pi} \end{aligned}$$

について, 辺々引くと,

$$(1 - e^{-\pi}) S = \sum_{k=1}^n e^{-k\pi} - ne^{-(n+1)\pi}$$

である。よって,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1 - e^{-\pi}} \left\{ \frac{1 - e^{-n\pi}}{e^{\pi} - 1} - ne^{-(n+1)\pi} \right\} \\ &= \frac{e^{\pi}}{e^{\pi} - 1} \left\{ \frac{1 - e^{-n\pi}}{e^{\pi} - 1} - ne^{-(n+1)\pi} \right\} \end{aligned}$$

である。

(答) $\sum_{k=1}^n k e^{-k\pi} = \frac{e^{\pi}}{e^{\pi} - 1} \left\{ \frac{1 - e^{-n\pi}}{e^{\pi} - 1} - ne^{-(n+1)\pi} \right\}$

(4)

$$\begin{aligned} f(k\pi) &= e^{-k\pi} (-2k\pi \cos 2k\pi + \sin 2k\pi) \\ &= -2k\pi e^{-k\pi} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(k\pi) &= -2\pi \sum_{k=1}^n k e^{-k\pi} \\ &= -2\pi \cdot \frac{e^{\pi}}{e^{\pi} - 1} \left\{ \frac{1 - e^{-n\pi}}{e^{\pi} - 1} - ne^{-(n+1)\pi} \right\} \end{aligned}$$

である。ここで,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n\pi} &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} ne^{-(n+1)\pi} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (ne^{-n})^{\pi} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{\pi-1} \cdot e^{-\pi} = 0 \end{aligned}$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(k\pi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2\pi e^{\pi}}{e^{\pi} - 1} \left\{ \frac{1 - e^{-n\pi}}{e^{\pi} - 1} - ne^{-(n+1)\pi} \right\} \\ &= \frac{-2\pi e^{\pi}}{(e^{\pi} - 1)^2} \end{aligned}$$

である。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(k\pi) = \frac{-2\pi e^{\pi}}{(e^{\pi} - 1)^2}$