

〔Ⅰ〕

1 G 2 I 3 G 4 C
5 H 6 E 7 F

(解説)

(1)

$$\begin{aligned}\int_0^4 |x^2 - 4| dx &= \int_0^2 (-x^2 + 4) dx + \int_2^4 (x^2 - 4) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x \right]_2^4 \\ &= 16\end{aligned}$$

(2)

全てのサイコロの目が a 以下のとき、サイコロの最大値は a 以下となり、その確率は $\left(\frac{a}{6}\right)^n$ である。よって全てのサイコロの目の中で最大値が a になる確率は

$$\left(\frac{a}{6}\right)^n - \left(\frac{a-1}{6}\right)^n$$

である。また、3 個のサイコロの最大値が a になる確率は

$$\left(\frac{a}{6}\right)^3 - \left(\frac{a-1}{6}\right)^3$$

であるから、題意の期待値は

$$\begin{aligned}& \sum_{k=1}^6 k \left\{ \left(\frac{k}{6}\right)^3 - \left(\frac{k-1}{6}\right)^3 \right\} \\ &= 6 \left\{ \left(\frac{6}{6}\right)^3 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 \right\} + 5 \left\{ \left(\frac{5}{6}\right)^3 - \left(\frac{4}{6}\right)^3 \right\} \cdots + 1 \left\{ \left(\frac{1}{6}\right)^3 - 0 \right\} \\ &= 6 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdots - \left(\frac{1}{6}\right)^3 \\ &= 6 - \frac{25}{24} \\ &\doteq 4.96\end{aligned}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned}y &= \sin x + \cos 2x \\ &= \sin x + (1 - 2\sin^2 x) \\ &= -2 \left(\sin x - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{9}{8}\end{aligned}$$

となる。ここで $0 \leq x < 2\pi$ より、 $-1 \leq \sin x \leq 1$ であるから

最大値は $\sin x = \frac{1}{4}$ のとき $\frac{9}{8}$

最小値は $\sin x = -1$ のとき -2 となる。

(4)

最高高度とは y の最大値である。

$$\begin{aligned}A: \quad y &= -0.06(x^2 - 16x - 17) \\ &= -0.06\{(x-8)^2 - 81\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B: \quad y &= -0.1(x^2 - 10x - 11) \\ &= -0.1\{(x-5)^2 - 36\}\end{aligned}$$

A は $x=8$ のとき $y=4.86$ で B は $x=5$ のとき $y=3.6$ となるから、最大光度の差は

$$4.86 - 3.6 = 1.26$$

である。また飛んだ距離は $y=0$ となる x のうち、 $x>0$ を満たす解である。A, B それぞれの距離を x_a, x_b とおくと、

$$\begin{aligned}A: \quad y &= -0.06(x^2 - 16x - 17) \\ &= -0.06(x-17)(x+1)\end{aligned}$$

より $x_a = 17$ で

$$\begin{aligned}B: \quad y &= -0.1(x^2 - 10x - 11) \\ &= -0.1(x-11)(x+1)\end{aligned}$$

より $x_b = 11$ であるから

$$x_a - x_b = 17 - 11 = 6 \text{ メートル}$$

である。

〔Ⅱ〕

8	A	9	B	10	E	11	H
12	A	13	C	101	5570		

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}
 a_2 &= 1+1=2 \\
 a_3 &= 2+1=3 \\
 a_4 &= 3+2=5 \\
 a_5 &= 5+2=7 \\
 a_6 &= 7+3=10 \\
 a_7 &= 10+3=13
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 a_{39} &= a_{38} + \frac{38}{2} \\
 &= a_{37} + \frac{37+1}{2} + \frac{38}{2} = a_{37} + 2 \times 19 \\
 &\quad \vdots \\
 &= a_1 + 2 \times (1+2+\cdots+19) \\
 &= 381 \\
 a_{40} &= a_{39} + \frac{40}{2} \\
 &= 381 + 20 \\
 &= 401
 \end{aligned}$$

(3)

$1 \leq m$ を満たす自然数 m とする。 m を用いて a_n を表す。

[1] $n = 2m - 1$ のとき

$$\begin{aligned}
 a_{2m-1} &= a_1 + 2 \times (1+2+\cdots+m-1) \\
 &= 1+m(m-1)
 \end{aligned}$$

[2] $n = 2m$ のとき

$$\begin{aligned}
 a_{2m} &= a_1 + 2(1+\cdots+m-1) + m \\
 &= m^2 + 1
 \end{aligned}$$

以上[1], [2]より, 初項から第 40 項までの和を S とすると

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{k=1}^{40} a_k \\
 &= \sum_{m=1}^{20} a_{2m-1} + \sum_{m=1}^{20} a_{2m} \\
 &= \sum_{m=1}^{20} (a_{2m-1} + a_{2m}) \\
 &= \sum_{m=1}^{20} (2m^2 - m + 2) \\
 &= 2 \times \frac{1}{6} \times 20 \times 21 \times 41 - \frac{1}{2} \times 20 \times 21 + 2 \times 20 \\
 &= 5570
 \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅲ〕

14	J	15	H
16	H	102	$\sqrt{6} + \sqrt{3} - 1$

(解説)

(1)

$A:B:C=2:3:7$ より

$$C = \frac{7}{2+3+7} \times 180^\circ = 105^\circ$$

となるから

$$\begin{aligned} \sin C &= \sin 105^\circ \\ &= \sin(45^\circ + 60^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

である。

(2)

$\triangle ABC$ における正弦定理より

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$$

が成立する。ここで $A=30^\circ$ より $\sin A = \frac{1}{2}$, $BC=2\sqrt{2}$ であるから

$$AB = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 2(\sqrt{3} + 1)$$

となる。

(3)

$B=45^\circ$ より $\sin B = \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin B \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2(\sqrt{3} + 1) \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 2(\sqrt{3} + 1) \end{aligned}$$

となる。

(4)

正弦定理より

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{BC}{\sin A} \\ R &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。また、正弦定理から $2R = \frac{AC}{\sin B}$ より $AC=4$ であるから

$$S = \frac{1}{2} (AB + BC + CA) \cdot r$$

が成立し、(3)の S を用いて

$$\begin{aligned} r &= \frac{2 \times 2(\sqrt{3} + 1)}{(2\sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{2} + 4)} \\ &= \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{3 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} \end{aligned}$$

となる。以上より

$$\begin{aligned} \frac{R}{r} &= 2\sqrt{2} \cdot \frac{3 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{2(\sqrt{3} + 1)} \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{3 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{(\sqrt{3} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \\ &= \sqrt{6} + \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

となる。