

数 学 問 題

注 意

1. この問題冊子は 10 ページあります。解答用紙には、おもてと裏があります。
2. あなたの受験番号は解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と、受験票の番号が一致していることを確認しなさい。
3. 解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔Ⅰ〕の解答は、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
5. 問題〔Ⅱ〕の解答は、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
6. 問題〔Ⅲ〕の解答は、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
7. 問題〔Ⅳ〕は、解答用紙の所定の欄に解答しなさい。
8. 1 問につき 2 つ以上マークしないこと。2 つ以上マークした場合には、その解答は無効になります。
9. 解答は、必ず鉛筆又はシャープペンシル(いずれも HB・黒)で記入しなさい。
10. 訂正は、消しゴムできれいに消し、消しクズを紙面に残さないようにしなさい。
11. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
12. 解答用紙は、必ず提出しなさい。
13. 試験時間は 90 分です。

※ この問題冊子は必ず持ち帰りなさい。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

- 〔Ⅰ〕 空欄アからキにあてはまる 0 から 9 までの数字を，解答用紙の所定の欄にマークせよ。また，空欄クとケにあてはまるものを解答群の中から選び，解答用紙の所定の欄にマークせよ。

- (1) 関数 $f(x)$ ， $g(x)$ が 2 つの関係式

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 + 2x - 2 \int_0^3 g(t) dt \\ g(x) = x^2 - 4x + \int_1^2 f(t) dt \end{cases}$$

を満たすならば

$$\int_1^2 f(t) dt = \boxed{\text{ア}}, \quad \int_0^3 g(t) dt = \boxed{\text{イ}}$$

である。

- (2) $a, b, c (c \neq 1)$ は実数とし， $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - c$ とすると，方程式 $f(x) = 0$ は $x = 1$ を重解にもつという。

このとき， $f(x) = (x - \boxed{\text{ウ}})^2(x - c)$ であり，曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を S とするならば， $S = \frac{64}{3}$ となる c の値は $c = -\boxed{\text{エ}}$ ，または $c = \boxed{\text{オ}}$ である。

- (3) 定積分 $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{(\log x)^2}{x} dx$ を既約分数で表すと、 $\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。ただし、 e は自然対数の底とする。

- (4) (a) xy 平面上で、点 $(3, 0)$ と直線 $x + y = 5$ との距離は $\boxed{\text{ク}}$ である。

- (b) x, y を実数とすると、 $(x - 3)^2 + y^2 \leq 2$ であることは、
 $|x - 2| + |y| \leq 3$ であるための $\boxed{\text{ケ}}$ 。

クの解答群

- | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| ① 1 | ② $\frac{3}{2}$ | ③ $\frac{5}{2}$ |
| ④ $\sqrt{2}$ | ⑤ $\sqrt{3}$ | ⑥ $\sqrt{5}$ |
| ⑦ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | ⑧ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | ⑨ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ |

ケの解答群

- ① 必要条件であるが、十分条件ではない
- ② 十分条件であるが、必要条件ではない
- ③ 必要十分条件である
- ④ 必要条件でも十分条件でもない

〔Ⅱ〕 a は実数とし、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって、行列 A を定める。

次の空欄アからキにあてはまるものを解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) $B = A - E$ とおくと

$$B^2 = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} \boxed{\text{イ}} \end{pmatrix}$$

となる。ただし、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

(2) A の n 乗 A^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を計算すると

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \\ 0 & 1 & \boxed{\text{オ}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

(3) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 18 & 2007 \\ 0 & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるのは

$$n = \boxed{\text{カ}}, a = \boxed{\text{キ}}$$

のときである。

〔Ⅲ〕 円に内接する正 20 角形の面積を求めたい。次の空欄アからエにあてはまる数を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

三角形 ABC は、 $AB = AC = 1$ を満たすとする。辺 AB 上に点 P があって、 $AP = PC = CB$ が成り立っているという。 $\angle B$ を θ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$) とおくと

(1) $\theta = \boxed{\text{ア}}^\circ$

(2) $BC = \boxed{\text{イ}}$

(3) $\cos \theta = \boxed{\text{ウ}}$

である。

これらを用いて、半径 r の円に内接する正 20 角形の面積 S を求めると

(4) $S = \boxed{\text{エ}} r^2$

であることがわかる。

ただし、円に内接する正 20 角形とは、すべての頂点がその円周上にあるような正 20 角形のことをいう。

〔Ⅳ〕 $f(x)$ は微分可能な関数で

$$f'(x) + f(x) = 4xe^{-x} \sin 2x, \quad f(0) = 0$$

を満たすとする。ただし、 e は自然対数の底とする。以下の問に答えよ。

(1) $g(x) = e^x f(x)$ とおくと、 $g'(x) = 4x \sin 2x$ となることを示せ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) 次の和を求めよ。

$$(a) \sum_{k=1}^n e^{-k\pi} \qquad (b) \sum_{k=1}^n k e^{-k\pi}$$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(k\pi)$ を求めよ。必要なら、 $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = 0$ を用いてよい。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)