

I

問題番号	解答
(1)	Q
(2)	T
(3)	A
(4)	C
(5)	F
(6)	U

II

1

問題番号	解答
ア	2
イ	2
ウ	8
エ	2
オ	6
カ	2
キ	0
ク	3
ケ	5

2 点Aから点Eへの最短経路を①とおき、その長さを n_1 (n_1 :自然数)とする。①の経路上に点Zをとり、①の経路で点Aから点Zまでたどる経路の長さを m (m :自然数)とおく。

「①の経路でAからZへたどる経路が、AからZへの最短経路ではない」と仮定する。すると、AからZへの①ではない最短経路が存在することになる。このAからZへの最短経路を②とおき、②の経路の長さを l (l :自然数)とおくと、

$$l < m$$

AからZまでは②の経路をたどり、ZからEまでは①のZからEまでの経路をたどることになると、AからEまでの経路の長さ n_2 (n_2 :自然数)は

$$n_2 = l + (n_1 - m) < m + (n_1 - m) = n_1$$

ゆえに、 $n_2 < n_1$ となるが、これは①の経路がAからEへの最短経路であることに矛盾する。

したがって、背理法により①の経路でAからZへたどる経路が、AからZへの最短経路であると言える。

証明終

III

1	問題番号	解答
	ア	3
	イ	2
	ウ	5
	エ	0
	オ	5

- 2 $f_1(0)=|0^2-1|=1$, $f_2(0)=|1-2\cdot 2+1|=2$, $f_3(0)=|2-2\cdot 3+1|=3$ より $f_n(0)=n$ …①
 となることが予想されるので、①を数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき

$f_1(0)=|0^2-1|=1$ なので、①は成立する。

(ii) $n=k$ (k は自然数) のとき①が成立すると仮定すると $f_k(0)=k$

このとき与えられた漸化式より、

$$\begin{aligned} f_{k+1}(0) &= |f_k(0)-2(k+1)+1| \\ &= |k-2k-2+1| \\ &= |-(k+1)| \\ &= k+1 \quad (\because k+1>0) \end{aligned}$$

ゆえに、 $n=k+1$ のときも①は成立する。

(i)と(ii)より、数学的帰納法から①はすべての自然数 n に対して成立する。

証明終

したがって、 $f_n(0)=n$ …(答)

- 3 $x \geq n-1$ の範囲で $f_n(x)=|x^2-n^2|$ …② となることを数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき、与えられた問題文より $f_1(x)=|x^2-1|$ なので、②は成立する。

(ii) $n=k$ (k は自然数) のとき②が成立すると仮定すると

$x \geq k-1$ の範囲について

$$f_k(x)=|x^2-k^2| \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$k > k-1$ より、 $x \geq k$ の範囲においても③は成立する。

ゆえに、 $x \geq (k+1)-1$ の範囲について、与えられた漸化式から

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= ||x^2-k^2|-2(k+1)+1| \\ &= |x^2-k^2-2k-1| \quad (\because x \geq k) \\ &= |x^2-(k+1)^2| \end{aligned}$$

したがって、 $n=k+1$ のときも②は成立する。

(i)と(ii)より、数学的帰納法から②はすべての自然数 n に対して成立する。

証明終

- 4 $x \geq 0$ の範囲で、 $y=f_n(x)$ のグラフと x 軸、 y 軸で囲まれた領域の面積を S_n とおく。

与えられた漸化式より、 $f_n(x) \geq 0$ …… ③ である。

また、②より $f_n(n)=|n^2-n^2|=0$ …… ④、 $x > n$ のとき $f_n(x)=|x^2-n^2| > 0$ …… ⑤

③と④と⑤より、 $S_n = \int_0^n f_n(x) dx$ である。 $n \geq 2$ のときについて

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{n-1} f_n(x) dx + \int_{n-1}^n |x^2-n^2| dx \\ &= \int_0^{n-1} |f_{n-1}(x)-2n+1| dx - \int_{n-1}^n (x^2-n^2) dx \quad (\because n-1 \leq x \leq n \Rightarrow x^2-n^2 \leq 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{6} \end{aligned}$$

ここで、 $n \geq 1$ について、 $0 \leq x \leq n$ のとき $f_n \leq 2n+1$ …… ⑦ であることを示す。

(i) $n=1$ のとき $0 \leq x \leq 1$ の範囲では $f_1(x)=|x^2-1| \leq 1$ より⑦を満たす。

(ii) $n=k$ (k は自然数) のときに⑦が成立すると仮定すると、 $f_k(x) \leq 2k+1$ が成立する。

このとき、与えられた漸化式から

$$f_{k+1}(x) = |f_k(x)-2(k+1)-1| = |f_k(x)-(2k+3)|$$

$0 \leq f_k(x) \leq 2k+1$ より、上式から

$$f_{k+1}(x) \leq 2k+3 = 2(k+1)+1$$

ゆえに、 $n=k+1$ のときも⑦は成立する。

(i)と(ii)より、数学的帰納法からすべての自然数 n に対して⑦は成立する。

ゆえに、⑥と⑦から $n \geq 2$ のときについて

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{n-1} \{(2n-1)-f_{n-1}(x)\} dx - \int_{n-1}^n (x^2-n^2) dx \\ &= [(2n-1)x]_0^{n-1} - S_{n-1} - \left[\frac{1}{3}x^3 - n^2 \cdot x \right]_{n-1}^n = 2n^2 - 2n + \frac{2}{3} - S_{n-1} \end{aligned}$$

したがって、 $n \geq 1$ のときについて

$$S_{n+2} = \left\{ 2(n+2)^2 - 2(n+2) + \frac{2}{3} \right\} - \left\{ 2(n+1)^2 - 2(n+1) + \frac{2}{3} \right\} + S_n = S_n + 4n + 4$$

$n=2m$ (m :自然数) のとき

$$S_{2(m+1)} = S_{2m} + 8m + 4$$

与えられた漸化式より、 $f_2(x)=|x^2-1|-3$ なので $m=1$ のときについて

$$S_2 = \int_0^1 \{3-(-x^2+1)\} dx + \int_1^2 \{3-(x^2-1)\} dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_1^2 = 4$$

ゆえに、階差数列の公式から $m \geq 2$ のとき

$$S_{2m} = S_2 + \sum_{i=1}^{m-1} (8i+4) = 4 + 8 \cdot \frac{1}{2} m(m-1) + 4(m-1) = 4m^2 \quad (m=1 \text{ のときも成立})$$

したがって $m=n/2$ を上式に代入することで、 n が偶数のとき $S_n = n^2$ …(答)