

数 学 問 題

注 意

1. この問題冊子は 10 ページあります。解答用紙には、おもてと裏があります。
2. あなたの受験番号は解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と、受験票の番号が一致していることを確認しなさい。
3. 解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔Ⅰ〕の解答は、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
5. 問題〔Ⅱ〕、〔Ⅲ〕の解答は、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
6. 問題〔Ⅳ〕の解答は、解答用紙の所定の欄に解答しなさい。
7. 1 問につき 2 つ以上マークしないこと。2 つ以上マークした場合には、その解答は無効になります。
8. 解答は、必ず鉛筆又はシャープペンシル(いずれも HB・黒)で記入しなさい。
9. 訂正は、消しゴムできれいに消し、消しクズを紙面に残さないようにしなさい。
10. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
11. 解答用紙は、必ず提出しなさい。
12. 試験時間は 90 分です。

※ この問題冊子は必ず持ち帰りなさい。

〔Ⅰ〕 次のアからツにあてはまる 0 から 9 までの数字を，解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし **カキ**，**セソ**，**チツ** は 2 桁の数であり，その他は 1 桁の数である。なお分数は既約分数にすること。

- (1) xy 平面上に 3 点 $A(-1, -3)$ ， $B(2, 6)$ ， $C(7, 1)$ がある。2 つのベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{\text{ア}}}$$

である。また $\triangle ABC$ の外接円の半径は **イ** であって，中心の座標は (**ウ**， **エ**) である。

- (2) a ， b は正の整数とする。3 次方程式 $x^3 - ax^2 - bx + 24 = 0$ が， $x = 3$ を解に持つならば，**オ** $a + b =$ **カキ** が成り立つ。この方程式 $x^3 - ax^2 - bx + 24 = 0$ が $x = 3$ を解に持ち，かつ他の 2 つの解も整数となるのは， $a = 1$ であるかまたは $a =$ **ク** のときであって， $a =$ **ク** なら，解は $x = 3$ ， $-$ **ケ**，**コ** である。

(3) A, B, C, D の4チームによるソフトボールの大会が次の方式で行われる。

(第1試合) CとDが対戦する。

(第2試合) AとBが対戦する。

(第3試合) 第1試合に勝ったチームと第2試合に負けたチームが対戦する。

(第4試合) 第2試合に勝ったチームと第3試合に勝ったチームが対戦する。この試合に勝ったチームが優勝となる。

なお、試合に引き分けはないものとする。

AがBに勝つ確率と、CがDに勝つ確率は $\frac{1}{2}$ とする。また、AがCに勝つ確率、AがDに勝つ確率、BがCに勝つ確率、BがDに勝つ確率はいずれも $\frac{2}{3}$ とする。

(a) BとCが第3試合で対戦する確率は $\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

(b) AとCが第4試合で対戦する確率は $\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

(c) Cが優勝する確率は $\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ である。

〔Ⅱ〕 以下のアからクにあてはまるものを解答用紙の所定の欄に記入せよ。

$$f(x) = |1 - 4 \sin^2 x| - 4 \cos x \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \text{ とおく。}$$

- (1) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ で, $1 - 4 \sin^2 x \geq 0$ となる x の範囲は

$$\boxed{\text{ア}} \leq x \leq \boxed{\text{イ}}$$

である。

- (2) 関数 $f(x)$ は, $x = \boxed{\text{ウ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる。また, $x = \boxed{\text{オ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。

- (3) $x = \boxed{\text{キ}}$ のとき, $f(x) = 0$ となる。また

$$\int_{\boxed{\text{キ}}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \boxed{\text{ク}}$$

である。

〔Ⅲ〕 以下のいからとにあてはまるものを解答用紙の所定の欄に記入せよ。

2 次の正方行列 A は等式 $A^2 - \sqrt{3} A + E = O$ を満たすという。

ただし $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

(1) A^3 と A^6 をそれぞれ $\alpha A + \beta E$ (α, β は実数) という形で表すと, $A^3 =$
い, $A^6 =$ ろ となる。ゆえに, $A + A^2 + \cdots + A^{12}$ を計算すると, $A + A^2 + \cdots + A^{12} =$ は であることがわかる。

(2) $B = A + A^2 + \cdots + A^{99}$ とおく。 B を $\alpha A + \beta E$ (α, β は実数) という形で表すと, $B =$ に である。

(3) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}$ (a, b, c は実数) のとき, (2) の行列 B が定める座標平面上の

点の移動 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって, x 軸上の点がすべて直線 $y = \sqrt{3} x$ 上に移

るなら, $a =$ ほ, $b =$ へ, $c =$ と である。

[IV] $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, $I_n(x) = \int_1^x (\log t)^n dt$ ($x > 0$) とおく。以下の問に答えよ。

(1) $I_1(x)$ と $I_2(x)$ を求めよ。

(2) $n \geq 1$ のとき, $I_{n+1}(x)$ を $I_n(x)$ を用いて表せ。

(3) $n \geq 1$ のとき, $I_n(x)$ は, y のある n 次の整式 $f_n(y)$ とある定数 C_n を用いて

$$I_n(x) = x f_n(\log x) + C_n$$

と表されることを, 数学的帰納法によって証明せよ。

(4) $f_n(y)$ の定数項を n を用いて表せ。