

[I]

[解答]

1. (1) F (2) J

2. (3) C (4) B

3. (5) I (6) K

〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア:2

イ ウ:3,6

エ:3

オ:3

カ キ:1,2

ク ケ:3,2

コ サ:4,6

シ ス セ:2,8,3

〔Ⅲ〕

1. 〔解答〕

- (1)ア イ:1,4
 (2)ウ エ:2,9
 (3)オ カ:1,4
 (4)キ ク ケ:5,1,8
 (5)コ サ:5,5

2~4 〔解答〕

2.

$$6 = 5 + 1 \quad 6^2 = 36 = 35 + 1 \quad 6^3 = 216 = 215 + 1$$

よって余り 1 と予想できるので、これを数学的帰納法により示す。

(i) $k=1$ 上で示されている。

(ii) $k=l$ で成り立っている場合

6^l が 5 で割って 1 余ることを仮定する。

つまり、 $6^l = 5n + 1$ (n は整数) を仮定する。

このとき、

$$6^{l+1} = 6 \cdot 6^l = 6(5n + 1) = 30n + 6 = 5(6n + 1) + 1$$

よって 6^{l+1} を 5 で割っても余りは 1 である。

以上より、任意の自然数 k において 6^k を 5 で割った余りは 1 である。

3.

$$\begin{aligned} & (a_1 - 1) \cdot 6^4 + (a_2 - 1) \cdot 6^3 + (a_3 - 1) \cdot 6^2 + (a_4 - 1) \cdot 6^1 + (a_5 - 1) \cdot 6^0 \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + (6^4 - 1)a_1 + (6^3 - 1)a_2 + (6^2 - 1)a_3 + (6 - 1)a_4 - (1 + 6 + 6^2 + 6^3 + 6^4) \end{aligned}$$

となる。

6^i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) は 5 で割って 1 余るから、 $6^i - 1$ は 5 で割りきれぬ。

また $1 + 6 + 6^2 + 6^3 + 6^4$ は各数が 5 で割って 1 余るから、全体としては 5 で割り切れる。

よって、

$(a_1 - 1) \cdot 6^4 + (a_2 - 1) \cdot 6^3 + (a_3 - 1) \cdot 6^2 + (a_4 - 1) \cdot 6^1 + (a_5 - 1) \cdot 6^0$ が 5 で割り切れる。

$\Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ が 5 で割り切れる。

ゆえに同値関係が示された。

4.

$$a_i - 1 = b_i$$

とおく。すなわち、 b_i は 0~5 の整数を取り得る。このとき、

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 &= (a_1 - 1) + (a_2 - 1) + (a_3 - 1) + (a_4 - 1) + (a_5 - 1) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) - 5 \end{aligned}$$

と書けるため、 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ が 5 の倍数であることと、 $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$ が 5 の倍数であることは同値である。

ここで、 $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ を 5 で割ったときのあまりが k ($k = 1, 2, \dots, 5$) となる組み合わせを $A_{n,k}$ とおく。このとき、求めるべき確率は $\frac{A_{5,0}}{6^5}$ と書け

$$A_{1,0} = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

また、任意の n に対して、 $A_{n,0} + A_{n,1} + A_{n,2} + A_{n,3} + A_{n,4}$ はすべての場合の数を表し、

$$A_{n,0} + A_{n,1} + A_{n,2} + A_{n,3} + A_{n,4} = 6^n \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。

また、 $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ が 5 で割り切れる場合は、 $n \geq 2$ で

- (a) $b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}$ が 5 で割り切れ、かつ $b_n = 0$ または $b_n = 5$
 (b) $b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}$ が 5 で割って 1 余り、かつ $b_n = 4$
 (c) $b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}$ が 5 で割って 2 余り、かつ $b_n = 3$
 (d) $b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}$ が 5 で割って 3 余り、かつ $b_n = 2$
 (e) $b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}$ が 5 で割って 4 余り、かつ $b_n = 1$

のいずれかの場合なので、

$$\begin{aligned} A_{n,0} &= 2 \times A_{n-1,0} + A_{n-1,1} + A_{n-1,2} + A_{n-1,3} + A_{n-1,4} \\ &= (A_{n-1,0} + A_{n-1,1} + A_{n-1,2} + A_{n-1,3} + A_{n-1,4}) + A_{n-1,0} \\ &= 6^{n-1} + A_{n-1,0} \quad (\because \textcircled{2} \text{より}) \end{aligned}$$

と書ける。すなわち、

$$\begin{aligned} A_{5,0} &= 6^4 + A_{4,0} \\ &= 6^4 + (6^3 + A_{3,0}) \\ &= \dots = 6^4 + 6^3 + 6^2 + 6^1 + A_{1,0} \\ &= 6^4 + 6^3 + 6^2 + 6^1 + 2 \quad (\because \textcircled{1} \text{より}) \\ &= 1556 \end{aligned}$$

であり、求める確率は

$$\frac{A_{5,0}}{6^5} = \frac{1556}{7776} = \frac{389}{1944}$$

である。