

【Ⅰ】

- (1)

ア

 1

イ

 2

ウ

 1

エ

 4

オ

 8
- (2)

カ

 3

キ

 2

ク

 1

ケ

 1

コ

 0
- (3)

サ

 3

シ

 3

ス

 3

セ

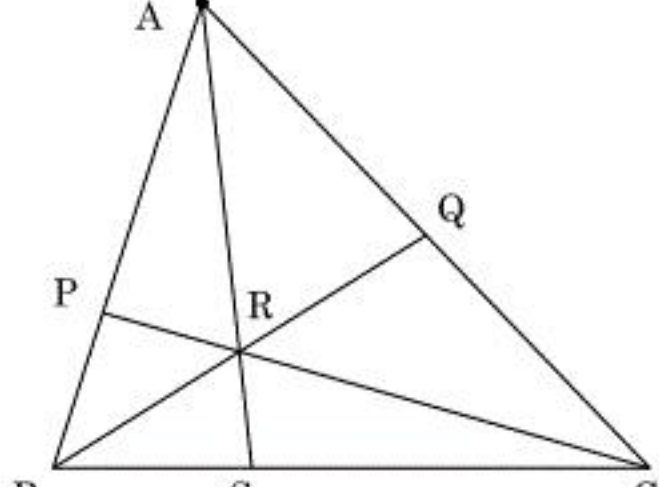
 2

ソ

 1

【解説】

(1)



$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$$

である。 $PR:RC=s:(1-s)$, $QR:RB=t:(1-t)$ とおき、 $\overrightarrow{AR}$ を 2 通りの方法で表すと

$$\overrightarrow{AR} = (1-s) \overrightarrow{AP} + s \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}(1-s) \overrightarrow{AB} + s \overrightarrow{AC} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{AR} = t \overrightarrow{AB} + (1-t) \overrightarrow{AQ} = t \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(1-t) \overrightarrow{AC} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は一次独立であるから、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の係数を比較すると

$$\begin{cases} \frac{2}{3}(1-s)=t \\ s=\frac{1}{2}(1-t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=\frac{1}{4} \\ t=\frac{1}{2} \end{cases}$$

とわかる。以上から

$$\overrightarrow{AR} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$$

である。また、SはARの延長線上にあることから、 $\overrightarrow{AS} = k \overrightarrow{AR}$ とおくと

$$\overrightarrow{AS} = \frac{k}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{4} \overrightarrow{AC}$$

である。SはBC上にあることから

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} + \frac{k}{4} &= 1 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となり、

$$\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$$

であることがわかる。以上のことから $BS:SC=1:2$, $AR:RS=3:1$ であり、

$$\triangle ASC = \frac{2}{3} \triangle ABC$$

$$\triangle RBS = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \triangle ABC = \frac{1}{12} \triangle ABC$$

という関係が成り立つ。よって、 $\triangle ASC$ の面積は $\triangle RBS$ の面積の 8 倍である。

(2)

$f(x)$ は x^2+x+1 でわると $5x+6$ 余るので、ある定数 d を用いて

$$f(x) = (x^2+x+1)(4x+d) + 5x+6$$

とかける。 $f(x)$ は $x-1$ でわると 2 余るので、剰余の定理から

$$\begin{aligned} f(1) &= 3(4+d) + 11 = 2 \\ \Leftrightarrow d &= -7 \end{aligned}$$

と求まる。よって

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+x+1)(4x-7) + 5x+6 \\ &= 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \\ \therefore a &= -3, b = 2, c = -1 \end{aligned}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} f(x) - 2 &= 4x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \\ &= (x-1)(4x^2+x+3) \\ &= (x-1) \left\{ 4 \left(x + \frac{1}{8} \right)^2 + \frac{47}{16} \right\} \end{aligned}$$

と変形できるので、 $x < 1$ のとき

$$|f(x) - 2| = -(4x^3 - 3x^2 + 2x - 3)$$

であり、 $1 \leq x$ のとき

$$|f(x) - 2| = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 3$$

である。以上から

$$\begin{aligned} \int_0^2 |f(x) - 2| dx &= \int_0^1 (-4x^3 + 3x^2 - 2x + 3) dx + \int_1^2 (4x^3 - 3x^2 + 2x - 3) dx \\ &= \left[-x^4 + x^3 - x^2 + 3x \right]_0^1 + \left[x^4 - x^3 + x^2 - 3x \right]_1^2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

と求まる。

(3)

点 (a, b) は原点を中心とする半径 $\sqrt{15}$ の円周上にあるので

$$a^2 + b^2 = 15 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。3 点 $A(a^2, a^3)$, $B(b^2, b^3)$, $C(1, 1)$ がどの 2 つも異なり、かつ一直線上にあるならば

$$a \neq b, a \neq 1, b \neq 1$$

かつ

$$\frac{a^3-1}{a^2-1} = \frac{b^3-1}{b^2-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

である。②を変形していくと

$$\begin{aligned} \frac{a^3-1}{a^2-1} &= \frac{b^3-1}{b^2-1} \\ \Leftrightarrow \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a-1)(a+1)} &= \frac{(b-1)(b^2+b+1)}{(b-1)(b+1)} \\ \Leftrightarrow \frac{a^2+a+1}{a+1} &= \frac{b^2+b+1}{b+1} \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{a^2}{a+1} &= 1 + \frac{b^2}{b+1} \\ \Leftrightarrow a^2(b+1) &= b^2(a+1) \\ \Leftrightarrow ab(a-b) + a^2 - b^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-b)(ab+a+b) &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $a \neq b$ であることから

$$\begin{aligned} ab+a+b &= 0 \\ \Leftrightarrow a+b &= -ab \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

とわかる。③を用いて①を変形していくと

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= 15 \\ \Leftrightarrow (a+b)^2 - 2ab &= 15 \\ \Leftrightarrow (ab)^2 - 2ab - 15 &= 0 \\ \Leftrightarrow (ab-5)(ab+3) &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $a > 0, b < 0$ より $ab < 0$ なので

$$ab = -3$$

である。これを②に代入すると

$$a+b=3$$

と求まる。以上から a, b は 2 次方程式 $x^2-3x-3=0$ の解であり、これを解くと

$$\begin{aligned} x^2-3x-3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2} \end{aligned}$$

であるので

$$a = \frac{3+\sqrt{21}}{2}, b = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$$

とわかる。

〔Ⅱ〕

$$(1) \begin{pmatrix} \boxed{\text{あ}} & 4 & \boxed{\text{い}} & 2 & \boxed{\text{う}} & 3 & \boxed{\text{え}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} \boxed{\text{お}} & 3 \cdot 2^k - 2 & \boxed{\text{か}} & 5 \end{pmatrix}$$

〔解説〕

(1)

$$AC = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 & a-c \\ 4 & 6-c \end{pmatrix}$$

$$CB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 2b & c \end{pmatrix}$$

である。 $AC = CB$ より、各成分を比較すると

$$\begin{cases} a-2=b \\ a-c=1 \\ 4=2b \\ 6-c=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases}$$

となる。このとき、 $1 \cdot c - 1 \cdot 2 = 3 - 2 = 1$ より C は逆行列をもち、

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

と求まる。

(2)

(a)

(1)から、 $AC = CB$ なので

$$A = CBC^{-1}$$

$$A^k = (CBC^{-1})^k = CB^kC^{-1}$$

である。ここで、

$$B^k = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であることを考えると

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^k & 1 \\ 2^{k+1} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^k - 2 & -2^k + 1 \\ 3 \cdot 2^{k+1} - 6 & -2^{k+1} + 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、 $\alpha_k = 3 \cdot 2^k - 2$ であることがわかる。

(b)

$p > 2$ のとき、 $0 < \frac{2}{p} < 1$, $0 < \frac{1}{p} < 1$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{p^k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3 \cdot 2^k - 2}{p^k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{6}{p} \left(\frac{2}{p} \right)^{k-1} - \frac{2}{p} \left(\frac{1}{p} \right)^{k-1} \right\} \\ &= \frac{6}{p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{p}} - \frac{2}{p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \\ &= \frac{6}{p-2} - \frac{2}{p-1} \\ &= \frac{4p-2}{(p-2)(p-1)} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{p^k} = \frac{p}{2} - 1$$

が成り立つならば

$$\begin{aligned} \frac{4p-2}{(p-2)(p-1)} &= \frac{p}{2} - 1 \\ \Leftrightarrow p^3 - 5p^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow p^2(p-5) &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $p > 2$ より、 $p = 5$ である。

〔Ⅲ〕

$$(1) \quad \boxed{\text{き}} \quad \frac{t^2}{1+t^2} \quad \boxed{<} \quad \frac{1}{1+t^2} \quad \boxed{\text{け}} \quad \frac{2t}{1-t^2} \quad \boxed{\text{こ}} \quad 1+t^2$$

$$(2) \quad \boxed{\text{さ}} \quad \sqrt{2}-1 \quad \boxed{\text{し}} \quad \sqrt{2}+1 \quad \boxed{\text{す}} \quad 32\pi$$

〔解説〕

(1)

それぞれ計算すると、

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+t^2$$

となる。

(2)

(a)

$$\tan \frac{\pi}{8} = t \text{ とおくと,}$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\Leftrightarrow 1-t^2 = 2t$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0$$

となる。 $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ より $\tan \frac{\pi}{8} > 0$ であるから

$$t = \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

である。また、加法定理より

$$\begin{aligned} \tan \frac{3\pi}{8} &= \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \right) \\ &= \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{8}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

と求まる。

(b)

立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{\sin x \cos^2 x} \right)^2 dx \\ &= 3\pi \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x} dx \end{aligned}$$

である。 $t = \tan x$ とおくと、(a)から

x	$\frac{\pi}{8}$	$\rightarrow$	$\frac{3\pi}{8}$
t	$\sqrt{2}-1$	$\rightarrow$	$\sqrt{2}+1$

となるので、(1)より

$$\begin{aligned} V &= 3\pi \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{1+t^2}{t^2} \cdot (1+t^2)^2 \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= 3\pi \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{(1+t^2)^2}{t^2} dt \\ &= 3\pi \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \left(t^2 + 2 + \frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= 3\pi \left[\frac{t^3}{3} + 2t - \frac{1}{t} \right]_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \\ &= 32\pi \end{aligned}$$

である。

〔IV〕

(1)

$y' = -2xe^{-x^2}$ より、傾きは $-2te^{-t^2}$ 。このとき接線の方程式は、

$$y = -2te^{-t^2}(x-t) + e^{-t^2} = -2te^{-t^2}x + (2t^2+1)e^{-t^2}$$

となるので、 y 切片は $(2t^2+1)e^{-t^2}$ 。

(2)

(a)

$$\begin{aligned} f'(t) &= (-4t^3 + 4at^2 + 2t - 2a)e^{-t^2} \\ &= -4(t-a)\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-t^2} \end{aligned}$$

$a > \sqrt{2}$ より、増減表は下の通り。

x	...	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	a	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	

よって極値は、極大値が

$$\frac{\sqrt{2}a+2}{\sqrt{e}} \quad (t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ のとき}) \text{ と } \frac{1}{e^{a^2}} \quad (t = a \text{ のとき}),$$

$$\text{極小値が } \frac{-\sqrt{2}a+2}{\sqrt{e}} \quad (t = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ のとき}).$$

(b)

$$\frac{\sqrt{2}a+2}{\sqrt{e}} > \frac{1}{e^{a^2}} \text{ より、最大値は } \frac{\sqrt{2}a+2}{\sqrt{e}}。$$

$$\text{また、} \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0 \text{ かつ } \frac{-\sqrt{2}a+2}{\sqrt{e}} < 0 \text{ より、}$$

$$\text{最小値は } \frac{-\sqrt{2}a+2}{\sqrt{e}}。 \text{ よって } f(t) \text{ の取りうる範囲は}$$

$$\frac{-\sqrt{2}a+2}{\sqrt{e}} \leq f(t) \leq \frac{\sqrt{2}a+2}{\sqrt{e}}。$$

(3)

(1)で求めた接線が点 (a, b) を通るとき

$$-2te^{-t^2}a + (2t^2+1)e^{-t^2} = b \Leftrightarrow (2t^2 - 2at + 1)e^{-t^2} = b$$

これを満たす t が存在するような点 (a, b) を考えればよい。よって

$$(2)(b) \text{ の結果から } \frac{-\sqrt{2}a+2}{\sqrt{e}} \leq b \leq \frac{\sqrt{2}a+2}{\sqrt{e}}。$$