

数 学 問 題

はじめに、これを読みなさい。

1. この問題冊子は4ページある。ただし、ページ番号のない白紙はページ数に含まない。
2. 解答用紙に印刷されている受験番号が正しいかどうか、受験票と照合して確認すること。
3. 監督者の指示にしたがい、解答用紙の氏名欄に氏名を記入すること。
4. 解答は、すべて解答用紙の所定欄にマークするか、または記入すること。
所定欄以外のところには何も記入しないこと。解答欄は裏面にもある。
5. 問題に指定された数より多くマークしないこと。
6. 解答は、必ず鉛筆またはシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入すること。
7. 訂正する場合は、消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
8. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。
9. 解答用紙はすべて回収する。持ち帰らず、必ず提出すること。ただし、この問題冊子は、必ず持ち帰ること。
10. 試験時間は60分である。
11. マーク記入例

良い例	悪い例
	

問Ⅰ a, b, c は、いずれも 1 から 20 までの正の整数である。

下記の空欄に当てはまる数字を所定の解答欄にマークしなさい。

(1) $a + b = c$ を満たす a, b, c の組は、全部で

ア	イ	ウ
---	---	---

 組である。

(2) $a = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$ を満たす a, b, c の組は、全部で 6 通りあり、それら 6 通りの組に対する $\left(\frac{c}{b}\right)^a$ の値の合計は、

エ	オ	カ	キ
---	---	---	---

64 である。

(3) $a < b < c$ を満たす a, b, c の組は、全部で

ク	ケ	コ	サ
---	---	---	---

 組である。

問Ⅱ 下記の空欄に当てはまる数字を所定の解答欄にマークしなさい。ただし分数はすべて既約分数の形にしなさい。

(1) 不等式

$$\log_2 5 + \log_2(x+2) < \log_2(7-x) + \log_2(2x+2)$$

の解は、 $-\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} < x < \boxed{\text{セ}}$ である。

(2) 関数

$$f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-6|$$

を考える。 $f(x)$ は $x = \boxed{\text{ソ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{タ}}$ をとる。

また、 $\int_0^6 f(x) dx = \boxed{\text{チ}} \boxed{\text{ツ}}$ である。

問Ⅲ 平面上に、点 $P(10, 0)$ を中心とする円： $(x - 10)^2 + y^2 = r^2$ と原点 O を通る直線 $y = ax (a > 0)$ がある。この円と直線は、異なる 2 点 S, T で交わり、交点の x 座標をそれぞれ、 s, t とおくとき、 $0 < s < 10 < t$ であるとする。また、三角形 OPS の面積は 5、三角形 OPT の面積は 25 である。

下記の空欄に当てはまる数字を所定の解答欄にマークしなさい。ただし分数はすべて既約分数の形にしなさい。

(1) $a = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ であり、円の半径 r は、 $\boxed{\text{ナ}} \sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

(2) $\sin \angle SPT = \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

(3) 内積 $\vec{OP} \cdot \vec{OS}$ の値は、 $\boxed{\text{ノ}} \boxed{\text{ハ}}$ である。

問Ⅳ 平面上に放物線 $y = x^2$ がある。この放物線上の点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ を接点とする接線を m 、点 $Q\left(-\frac{7}{2}, \frac{49}{4}\right)$ を接点とする接線を n とする。

以下の問に答えなさい。

なお、設問(1)、(3)は空欄に当てはまる数字を所定の解答欄にマークしなさい。

また、設問(2)は所定の欄に解答と途中の計算式を書きなさい。

ただし、分数はすべて既約分数にしなさい。

(1) 接線 m と接線 n の交点の座標は、 $\left(-\frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}, -\frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}\right)$ である。

(2) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 (r > 0)$ で表される円が、 m と n に接していると
する。このとき、円の中心 (a, b) は、ある 2 本の直線のいずれかの上にあ
る。それら 2 本の直線の方程式を求めなさい。

(3) m と n に接し、かつ点 P を通る円の方程式は、

$$\left(x + \frac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}}\right)^2 + \left(y - \frac{\boxed{\text{ム}}}{\boxed{\text{メ}}}\right)^2 = \boxed{\text{モ}}$$

と $\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{15}{4}\right)^2 = 32$ である。