

数 学 問 題

はじめに、これを読むこと。

1. 問題は、1 ページから 3 ページに書かれている。それ以外のページは、計算用紙として使用してよい。
2. 解答用紙に印刷されている受験番号が正しいかどうか、受験票と照合して確認すること。
3. 監督者の指示にしたがい、解答用紙の氏名欄に氏名を記入すること。
4. 解答は、すべて解答用紙の所定欄にマークするか、または記入すること。所定欄以外のところには何も記入しない。
5. 分数形で解答する場合は、それ以上約分できない形で答えなさい。また、根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。
6. 問題に指定された数より多くマークしないこと。
7. 解答は、必ず鉛筆またはシャープペンシル(いずれも HB・黒)で記入のこと。
8. 訂正する場合は、消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
9. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。
10. **解答用紙はすべて回収する。**持ち帰らず、必ず提出しなさい。ただし、この問題用紙は、必ず持ち帰ること。
11. 試験時間は 60 分である。
12. マーク記入例

良い例	悪い例
	

※ この問題用紙は、必ず持ち帰りなさい。

〔Ⅰ〕 次の各問の に入る数字を下の表から選んでアルファベットをマークせよ。同じアルファベットを選んでもかまわない。

$$1. \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + 2k} = \frac{n(\text{ (1) } n + \text{ (2) })}{4(n+1)(n+2)}$$

2. 放物線 $y = x^2$ 上を動く 2 点 P, Q がある。P, Q の x 座標をそれぞれ a, b とし、 $a < 0 < b$ かつ $b - a = 2$ とする。このとき、P, Q と原点を結んで、できる三角形の面積が最大となるのは、 $a = \text{ (3) }$ のときで、その面積は、 (4) である。

3. $f(t)$ を t の 2 次関数とし、 $g(x) = x + \int_0^x f(t) dt$ とする。 $y = g(x)$ は、 $x = 1$ と $x = 2$ において極値をとり、 $x = \frac{3}{2}$ での $y = g(x)$ の接線の傾きが $\frac{3}{2}$ であるとする。このとき、 $y = g(x)$ の極大値は (5) であり、極小値は (6) である。

A. 0

B. 1

C. -1

D. 2

E. -2

F. 3

G. -3

H. 4

I. -4

J. 5

K. -5

L. 6

M. -6

N. 9

O. 11

P. 13

Q. 15

R. 17

S. 19

T. 21

U. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

V. $\frac{1}{3}$

W. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

X. $-\frac{1}{3}$

Y. $\frac{4}{9}$

Z. $\frac{\sqrt{2}}{27}$

〔Ⅱ〕 次のア～セに当てはまる 0～9 の数字を解答欄にマークせよ。

△ABCにおいて、 $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ とし、 $\theta = \angle ACB$ と置く。いま、 $a + b = 10$, $c = 2\sqrt{7}$ で、△ABCの面積が $6\sqrt{3}$ であるとする。このとき、余弦定理から

$$c^2 = (a + b)^2 - \boxed{\text{ア}} ab(1 + \cos \theta)$$

となるので、

$$ab(1 + \cos \theta) = \boxed{\text{イウ}}$$

である。一方で△ABCの面積が $6\sqrt{3}$ であるから、

$$ab(1 + \cos \theta) = \sqrt{\boxed{\text{エ}}} ab \sin \theta$$

すなわち、 $1 + \cos \theta = \sqrt{\boxed{\text{エ}}} \sin \theta$ である。

この両辺を2乗して式を整理すれば、

$$1 + \cos \theta = \boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{オ}} \cos \theta$$

となり、 $\cos \theta = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ と求まる。

従って $a < b$ とすれば、 $a = \boxed{\text{コ}}$, $b = \boxed{\text{サ}}$ である。また、△ABC

の外接円の面積は、 $\frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}} \pi$ となる。

〔Ⅲ〕 サイコロを n 回投げる。 $i = 1, 2, 3, \dots, n$ について, i 回目に出た目を a_i とする。このとき, 次の問に答えよ。

1. 次のア～サに当てはまる 0～9 の数字を解答欄にマークせよ。

(1) $a_1 + a_2$ が, 4 の倍数となる確率は, $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(2) $a_1 + a_2$ が, 4 で割って余りが 1 となる確率は, $\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(3) $a_1 + a_2$ が, 4 で割って余りが 2 となる確率は, $\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(4) $a_1 + a_2$ が, 4 で割って余りが 3 となる確率は, $\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

(5) $a_1 + a_2 + a_3$ が, 4 の倍数となる確率は, $\frac{\boxed{\text{コサ}}}{6^3}$ である。

2. 自然数 k について, 6^k を 5 で割った余りを求めよ。

3. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ が 5 の倍数であることと,

$$(a_1 - 1) \cdot 6^4 + (a_2 - 1) \cdot 6^3 + (a_3 - 1) \cdot 6^2 + (a_4 - 1) \cdot 6^1 + (a_5 - 1) \cdot 6^0$$

が 5 の倍数であることは, 同値であることを示せ。

4. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ が 5 の倍数である確率を求めよ。