お

数　学　問　題

注　意

1. この問題冊子は12ページあります。解答用紙には，おもてと裏があります。
2. あなたの受験番号は解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と，受験票の番号が一致していることを確認しなさい。
3. 解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔Ⅰ〕の解答は，解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
5. 問題〔Ⅱ〕，〔Ⅲ〕の解答は，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
6. 問題〔Ⅳ〕の解答は，解答用紙の所定の欄に解答しなさい。
7. 1問につき2つ以上マークしないこと。2つ以上マークした場合には，その解答は無効になります。
8. 解答は，必ず鉛筆又はシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入しなさい。
9. 訂正は，消しゴムできれいに消し，消しクズを紙面に残さないこと。
10. 解答用紙は，絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
11. 解答用紙は必ず提出しなさい。
12. 試験時間は90分です。

※　この問題冊子は必ず持ち帰りなさい。

〔Ⅰ〕 以下の**ア**から**ソ**にあてはまる0から9までの数字を，解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし，［ケコ］，［セソ］は2桁の数であり，その他は1桁の数である。なお分数は既約分数にすること。

(1) △ABCにおいて，辺ABを2：1に内分する点をPとし，辺ACの中点をQとする。このとき，線分BQと線分CPの交点をRとすると，

$$\overrightarrow{AR} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{AB} + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{AC}$$

となる。また，直線ARと辺BCの交点をSとすると，△ASCの面積は△RBSの面積の［オ］倍である。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

(2)　3次の整式 $f(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c$ は，$x - 1$ で割ると2余り，$x^2 + x + 1$ で割ると $5x + 6$ 余るという。このとき，

$a = -$ **カ** ，$b =$ **キ** ，$c = -$ **ク**

であり，

$$\int_0^2 |f(x) - 2|\, dx = \boxed{\text{ケコ}}$$

となる。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

(3) 座標平面上で，点$(a,\ b)$は原点を中心とする半径$\sqrt{15}$の円周上にあり，$a>0$，$b<0$であるとする。このとき，3点$A(a^2,\ a^3)$，$B(b^2,\ b^3)$，$C(1,\ 1)$がどの2つも異なり，かつ一直線上にあるならば，

$$a+b=\boxed{\text{サ}},\quad ab=-\boxed{\text{シ}}$$

であり，

$$a=\frac{\boxed{\text{ス}}+\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}}{2},\quad b=\frac{\boxed{\text{ス}}-\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}}{2}$$

である。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

〔Ⅱ〕 以下の**あ**から**か**にあてはまるものを解答用紙の所定の欄に記入せよ。

a，b，c は実数とし，行列 A，B，C を

$$A=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & c \end{pmatrix}$$

とおく。

(1) A，B，C が $AC=CB$ を満たすように，a，b，c の値を定めると，

$a=$ [あ]，$b=$ [い]，$c=$ [う]

である。このとき，C は逆行列をもち，

$C^{-1}=$ ([え])

となる。

(2) a，b，c は(1)で求めた値をとるとする。

(a) $A^k=\begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k \end{pmatrix}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと，

$\alpha_k=$ [お] である。

(b) $p>2$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{p^k}=\frac{p}{2}-1$ が成り立つならば，

$p=$ [か] である。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

〔Ⅲ〕 以下の**き**から**す**にあてはまるものを解答用紙の所定の欄に記入せよ。なお，根号を含む式は，分母を有理化すること。

(1) $t=\tan x$ とおく。$\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\tan 2x$, $\dfrac{dt}{dx}$ をそれぞれ t を用いて表すと，

$\sin^2 x =$ [き] ,　　$\cos^2 x =$ [く] ,

$\tan 2x =$ [け] ,　　$\dfrac{dt}{dx} =$ [こ]

となる。

(2) (a) $\tan\dfrac{\pi}{8}$ の値は [さ] であり，$\tan\dfrac{3\pi}{8}$ の値は [し] である。

(b) 曲線 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin x\cos^2 x}$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と3つの直線

$$y=0,\ x=\frac{\pi}{8},\ x=\frac{3\pi}{8}$$

で囲まれた図形を，x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積は [す] である。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

〔Ⅳ〕 a，b は実数で，$a > \sqrt{2}$ とする。xy 平面上の点$(a,\ b)$から曲線 $y = e^{-x^2}$ に接線を引くことができるための条件を求めたい。

(1) 曲線 $y = e^{-x^2}$ 上の点$(t,\ e^{-t^2})$における接線の傾きと y 切片を求めよ。

(2) $f(t) = (2t^2 - 2at + 1)e^{-t^2}$ とおく。

(a) 関数 $f(t)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(b) $f(t)$ のとり得る値の範囲を求めよ。必要ならば

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{t \to -\infty} f(t) = 0$$

を用いてよい。

(3) 点$(a,\ b)$から曲線 $y = e^{-x^2}$ に接線を引くことができるための条件を a，b を用いた式で表せ。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）