

[I]

(1)	ア	㊦	イ	㊣		
(2)	ア	㊥	イ	㊢		
(3)	ア	㊦	イ	㊣	ウ	㊨
(4)	ア	㊥	イ	㊦		
(5)	ア	㊥	イ	㊧	ウ	㊧

(1)

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{25}-\sqrt{24}}}=\sqrt{\sqrt{25}+\sqrt{24}}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

(2)

真数条件より $x > 1, y > 0$

$$\begin{aligned}\log_3(x-1)+\log_3(y+2)&=2 \\ \Leftrightarrow \log_3(x-1)(y+2)&=\log_3 9\end{aligned}$$

真数を比較して,

$$\begin{aligned}(x-1)(y+2)&=9 \\ \Leftrightarrow xy+2x-y-11&=0 \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\log_4 \sqrt{x}+\log_4 \sqrt{y}&=\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_4 xy&=\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \log_4 xy&=\log_4 4\end{aligned}$$

真数を比較して, $xy=4 \therefore y=\frac{4}{x}$

①に代入して,

$$\begin{aligned}4+2x-\frac{4}{x}-11&=0 \\ \Leftrightarrow 2x^2-7x-4&=0 \\ \Leftrightarrow (x-4)(2x+1)&=0 \\ \therefore x&=-\frac{1}{2}, 4\end{aligned}$$

$x > 1$ より $x=4, y=1$

(3)

$$\begin{aligned}2(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)+\left(2\sqrt{3}+6\right) \cos x+3\sqrt{3}+2&=0 \\ \Leftrightarrow 4 \cos ^2 x+\left(2\sqrt{3}+6\right) \cos x+3\sqrt{3}&=0 \\ \Leftrightarrow\left(2 \cos x+\sqrt{3}\right)\left(2 \cos x+3\right)&=0\end{aligned}$$

$-1 \leq \cos x \leq 1$ より $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leq x < 2 \pi$ より $x=\frac{5}{6} \pi, \frac{7}{6} \pi$

(4)

$y=x^2-3x+1$ と $y=-x+1$ との交点の x 座標は

$$x^2-3x+1=-x+1 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \therefore x=0,2$$

よって, 求める面積は,

$$\begin{aligned}\int_0^2\left\{(-x+1)-\left(x^2-3x+1\right)\right\} d x &=\int_0^2\left(-x^2+2x\right) d x \\ &=\left[-\frac{1}{3} x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

(5)

余弦定理より,

$$\begin{aligned}A B^2 &=A C^2+B C^2-2 A C \cdot B C \cos \angle C \\ &=2^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2-2 \times 2 \times\left(\sqrt{3}-1\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2}=2 \\ \therefore A B &=\sqrt{2}\end{aligned}$$

また, $\triangle A B C$ の面積は,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} A C \cdot B C \sin \angle C \\ &=\frac{1}{2} \times 2 \times\left(\sqrt{3}-1\right) \times \frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\end{aligned}$$

一方, 余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos \angle B &=\frac{A B^2+B C^2-A C^2}{2 A B \cdot B C} \\ &=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2-2^2}{2 \times \sqrt{2} \cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$0 \leq \angle B < 180^{\circ}$ より $\angle B=135^{\circ}$

[II]

ア	㉔	イ	㉕	ウ	㉖	エ	㉗	オ	㉘
カ	㉙	キ	㉚						

(1)

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (7, 3, 3) \\ \overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = (-4, 2, 1) \\ \overrightarrow{OR} = 2\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = (4, 3, -8) \end{cases}$$

よって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OP} + \alpha\overrightarrow{PQ} + \beta\overrightarrow{PR} \\ &= (7 - 11\alpha - 3\beta, 3 - \alpha, 3 - 2\alpha - 11\beta) \end{aligned}$$

ここで, S は AD 上にあり, $\overrightarrow{OS} = \gamma\overrightarrow{OA} + (1 - \gamma)\overrightarrow{OD}$ とおけるので,

$$\overrightarrow{OS} = (3\gamma, 5\gamma - 3, -\gamma + 2)$$

各成分を比較して,

$$\begin{cases} 11\alpha + 3\beta + 3\gamma = 7 \\ \alpha + 5\gamma = 6 \\ 2\alpha + 11\beta - \gamma = 1 \end{cases}$$

これらを解いて, $\alpha = \frac{2}{7}, \beta = \frac{1}{7}, \gamma = \frac{8}{7} \dots$ アイウエ

(2)

$$\overrightarrow{OS} = \frac{8}{7}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{7}\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AS} = -\frac{1}{7}\overrightarrow{AD} \dots$$
 オカ

(3)

$$\overrightarrow{DS} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AS} = -\frac{8}{7}\overrightarrow{AD}$$

$$\frac{|\overrightarrow{DS}|}{|\overrightarrow{AS}|} = \frac{\left| -\frac{8}{7}\overrightarrow{AD} \right|}{\left| -\frac{1}{7}\overrightarrow{AD} \right|} = 8 \dots$$
 キ

[III]

(1)

必要十分条件は,

$$|a - (a + d)| < a + 2d < a + (a + d) \\ \Leftrightarrow -d < a < d$$

$a > 0, d \geq 0$ より, $\boxed{a > d}$

(2)

三角形を ABC とおき, $AB = a, CA = a + d, BC = a + 2d$ とすると, 余弦定理より,

$$\cos \angle A = \frac{a^2 - 2ad - 3d^2}{2a(a + d)} = \frac{a - 3d}{2a}$$

$\angle A$ が鋭角となる必要十分条件は $\cos \angle A > 0$ より $a > 3d$

ここで,

$$\cos \angle B = \frac{a^2 + 2ad + 3d^2}{2a(a + 2d)} > 0 \\ \cos \angle C = \frac{a^2 + 6ad + 5d^2}{2(a + d)(a + 2d)} > 0$$

より, $\angle B, \angle C$ は常に鋭角となるので, $\triangle ABC$ が鋭角三角形となる必要十分条件は $a > 3d$ Q.E.D.

(3)

各辺が等差数列をなすので, 3 辺はそれぞれ $a, a + d, a + 2d$ とおける.

(1) より, 条件 $a > d \dots\dots$ ① を満たす.

さらに, 和 $12n$ 以下なので,

$$a + (a + d) + (a + 2d) \leq 12n \\ \therefore a + d \leq 4n \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

である.

初項 a は, ①, ② より, $d < a \leq 4n - d$ を満たす.

ここで, $d = k$ のときの整数 a のとり得る値の個数は,

$$(4n - d) - d = 4n - 2k \quad (d = k \text{ のとき})$$

d のとり得る値の範囲は, $d < 4n - d$ より,

$$d = k < 2n \quad \text{よって, } 0 \leq k \leq 2n - 1$$

よって, 求める値は,

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (4n - 2k) = 4n \cdot 2n - 2 \cdot \frac{2n(2n - 1)}{2} \\ = 8n^2 - 4n^2 + 2n \\ = 4n^2 + 2n$$

$\therefore$ 求める三角形の個数は $\boxed{2n(2n + 1)}$ 個

(4)

(2) より, 条件 $a > 3d \dots\dots$ ③ を満たす.

② ③ より $3d < a \leq 4n - d$ を満たす整数 a の個数を考える.

(3) 同様に, $d = k$ のとき, $0 \leq 3k < 4n - k$ より, $0 \leq k \leq n - 1$

a の個数は, $(4n - d) - 3d = 4n - 4k$

よって, 求める値は,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (4n - 4k) = 4n \cdot n - 4 \cdot \frac{n(n - 1)}{2} \\ = 4n^2 - 2n^2 + 2n \\ = 2n^2 + 2n$$

$\therefore$ 求める三角形の個数は $\boxed{2n(n + 1)}$ 個