

問Ⅰ

- (1)

ア 8

イ 3

ウ 2
- (2)

エ 3

オ 7

カ 5
- キ 4

ク 2
- (3)

ケ 7

コ 9

サ 3
- シ 2

【解説】

(1)

まず、 a_1+a_2, a_3+a_4 がとり得る値の組み合わせを考える。

$$2 \leq a_1+a_2 \leq 6$$

$$10 \leq a_3+a_4 \leq 14$$

であり、

$$a_1+a_2+a_3+a_4=16$$

であるから、 a_1+a_2, a_3+a_4 の組み合わせは次の 5 通りに限られる。

$$(a_1+a_2, a_3+a_4)=(2, 14), (3, 13), (4, 12), (5, 11), (6, 10)$$

次に、各 a_1+a_2, a_3+a_4 について、 a_1, a_2, a_3, a_4 の組み合わせを考える。

[1] $(a_1+a_2, a_3+a_4)=(2, 14)$ のとき

$$(a_1, a_2, a_3, a_4)=(1, 1, 7, 7)$$

[2] $(a_1+a_2, a_3+a_4)=(3, 13)$ のとき

$$(a_1, a_2, a_3, a_4)=(1, 2, 6, 7)$$

[3] $(a_1+a_2, a_3+a_4)=(4, 12)$ のとき

$$(a_1, a_2, a_3, a_4)=(1, 3, 5, 7), (2, 2, 5, 7), (1, 3, 6, 6), (2, 2, 6, 6)$$

[4] $(a_1+a_2, a_3+a_4)=(5, 11)$ のとき

$$(a_1, a_2, a_3, a_4)=(2, 3, 5, 6)$$

[5] $(a_1+a_2, a_3+a_4)=(6, 10)$ のとき

$$(a_1, a_2, a_3, a_4)=(3, 3, 5, 5)$$

よって、 a_1, a_2, a_3, a_4 の組は全部で 8 組ある。さらに、各組み合わせについて $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2$ の値を求めると、次の表のようになる。

(a_1, a_2, a_3, a_4)	$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2$
$(1, 1, 7, 7)$	100
$(1, 2, 6, 7)$	90
$(1, 3, 5, 7)$	84
$(2, 2, 5, 7)$	82
$(1, 3, 6, 6)$	82
$(2, 2, 6, 6)$	80
$(2, 3, 5, 6)$	74
$(3, 3, 5, 5)$	68

表より、 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2$ の最大値は 100、最小値は 68 であるから、その差は

$$100-68=32$$

となる。

(2)

赤球、白球が共に 2 個ずつである確率は、

$$\frac{{}_4C_2 \times {}_6C_2}{{}_{10}C_4} = \frac{3}{7}$$

である。

赤球が 3 個、白球が 1 個である確率は、

$$\frac{{}_4C_3 \times {}_6C_1}{{}_{10}C_4} = \frac{4}{35}$$

であり、赤球が 4 個である確率は、

$$\frac{{}_4C_4}{{}_{10}C_4} = \frac{1}{210}$$

であるから、赤球が 3 個以上である確率は、

$$\frac{4}{35} + \frac{1}{210} = \frac{5}{42}$$

となる。

(3)

$f(x)$ が $x-1$ でも $x+3$ でも割り切れるので、

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f(-3)=0 \end{cases}$$

が成り立つ。

$f(x)$ に $x=1$ と $x=-3$ を代入すると、

$$\begin{cases} f(1)=a-b+2 \\ f(-3)=9a-b-54 \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{cases} a-b+2=0 \\ 9a-b-54=0 \end{cases}$$

となる。2 式を連立して解くと、

$$a=7, b=9$$

を得る。このとき、 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3+7x^2-9 \\ &= (x-1)(x+3)(2x+3) \end{aligned}$$

と変形できるので、 $f(x)=0$ の解は

$$x=1, -3, -\frac{3}{2}$$

となる。

問Ⅱ

(1)	$\begin{array}{ c } \hline \text{ス} \\ \hline \end{array} 3$	$\begin{array}{ c } \hline \text{セ} \\ \hline \end{array} 5$	$\begin{array}{ c } \hline \text{ソ} \\ \hline \end{array} 4$
	$\begin{array}{ c } \hline \text{タ} \\ \hline \end{array} 3$		
(2)	$\begin{array}{ c } \hline \text{チ} \\ \hline \end{array} 3$	$\begin{array}{ c } \hline \text{ツ} \\ \hline \end{array} 1$	$\begin{array}{ c } \hline \text{テ} \\ \hline \end{array} 7$
(3)	$\begin{array}{ c } \hline \text{ト} \\ \hline \end{array} 5$	$\begin{array}{ c } \hline \text{ナ} \\ \hline \end{array} 3$	$\begin{array}{ c } \hline \text{ニ} \\ \hline \end{array} 4$
	$\begin{array}{ c } \hline \text{ヌ} \\ \hline \end{array} 3$	$\begin{array}{ c } \hline \text{ネ} \\ \hline \end{array} 5$	$\begin{array}{ c } \hline \text{ノ} \\ \hline \end{array} 3$
	$\begin{array}{ c } \hline \text{ハ} \\ \hline \end{array} 1$	$\begin{array}{ c } \hline \text{ヒ} \\ \hline \end{array} 6$	

【解説】

$$(1) \quad a_{n+1} - 4a_n - 9 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

の特性方程式を解く。

$$x - 4x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

よって、①は

$$a_{n+1} + 3 = 4(a_n + 3)$$

と変形でき、

$$a_n + 3 = 4^{n-1} \cdot (a_1 + 3)$$

$$= 5 \cdot 4^{n-1}$$

となる。したがって、一般項は

$$a_n = 5 \cdot 4^{n-1} - 3$$

となる。

(2)

$$a_{51} = 5 \cdot 4^{50} - 3$$

である。 $5 \cdot 4^{50}$ の常用対数をとると、

$$\log_{10} 5 \cdot 4^{50} = \log_{10} \frac{10}{2} \cdot 2^{100}$$

$$= \log_{10} 10 \cdot 2^{99}$$

$$= 1 + 99 \log_{10} 2$$

$$= 1 + 99 \times 0.3010$$

$$= 30.7990$$

となる。したがって、

$$\log_{10} 2 \cdot 10^{30} = 30.3010 < \log_{10} 5 \cdot 4^{50} = 30.7990 < 31$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 10^{30} < 5 \cdot 4^{50} < 10^{31}$$

$$\therefore 10^{30} < 2 \cdot 10^{30} - 3 < 5 \cdot 4^{50} - 3 < 10^{31} - 3 < 10^{31}$$

となるので、 $5 \cdot 4^{50} - 3$ は31桁の数字であることがわかる。

次に $5 \cdot 4^{50} - 3$ の一の位の数を考える。

$$5 \cdot 4^{50} = 10 \cdot 2^{99}$$

であるから、 $5 \cdot 4^{50}$ の一の位の数は

$$0$$

である。よって、 $5 \cdot 4^{50} - 3$ の一の位は

$$7$$

となる。

(3)

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

であるから、

$$S_n = \sum_{k=1}^n (5 \cdot 4^{k-1} - 3)$$

$$= \frac{5 \cdot (4^n - 1)}{4 - 1} - 3n$$

$$= \frac{5}{3} \cdot 4^n - 3n - \frac{5}{3}$$

となる。

4^n が10桁以下であると仮定すると、次の式が成り立つ。

$$\log_{10} 4^n < 10$$

$$\Leftrightarrow 2n \log_{10} 2 < 10$$

$$\Leftrightarrow n < \frac{10}{2 \log 2} < 16.7$$

$$\therefore n \leq 16$$

S_n と 4^n の桁数は必ずしも一致するとは限らないので、 $n = 16$ 付近での S_n の桁数を調べる。

[1] $n = 16$ のとき

$n = 16$ のとき、 S_{16} は

$$S_{16} = \frac{5}{3} \cdot 4^{16} - 3 \times 16 - \frac{5}{3}$$

$$= \frac{5}{3} \cdot 4^{16} - \frac{149}{3}$$

である。 $\frac{5}{3} \cdot 4^{16}$ に常用対数を用いると、

$$\log_{10} \frac{5}{3} \cdot 4^{16} = \log_{10} \frac{10 \cdot 2^{31}}{3}$$

$$= 1 + 31 \log_{10} 2 - \log_{10} 3$$

$$= 9.8539$$

となる。ここで、

$$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3$$

$$= 0.7781$$

$$\log_{10} 8 = 3 \log_{10} 2$$

$$= 0.9030$$

であるから、 $\log_{10} \frac{5}{3} \cdot 4^{16}$ の小数部分0.8539について

$$\log_{10} 6 < 0.8539 < \log_{10} 8$$

が成り立つので、

$$6 \cdot 10^9 < \frac{5}{3} \cdot 4^{16} < 8 \cdot 10^9$$

となる。よって、 $\frac{5}{3} \cdot 4^{16}$ は最高位の数字が6以上8未満である10桁の数であるとわかる。

また、

$$10 < \frac{149}{3} < 10^2$$

であるから、 $\frac{5}{3} \cdot 4^{16}$ から $\frac{149}{3}$ を引くことによる桁数の変化は無い。したがって、 S_{16} の桁数は10桁である。

[2] $n = 17$ のとき

$$S_{17} = \frac{5}{3} \cdot 4^{17} - 3 \times 17 - \frac{5}{3}$$

$$= \frac{5}{3} \cdot 4^{17} - \frac{158}{3}$$

である。 $\frac{5}{3} \cdot 4^{17}$ に常用対数を用いると、

$$\log_{10} \frac{5}{3} \cdot 4^{17} = \log_{10} \frac{10 \cdot 2^{33}}{3}$$

$$= 1 + 33 \log_{10} 2 - \log_{10} 3$$

$$= 10.4559$$

である。したがって、

$$10 < \log_{10} \frac{5}{3} \cdot 4^{17} < 11$$

$$\Leftrightarrow 10^{10} < \frac{5}{3} \cdot 4^{17} < 10^{11}$$

となるので、 $\frac{5}{3} \cdot 4^{17}$ は11桁である。また、 $\log_{10} \frac{5}{3} \cdot 4^{16}$ の小数部分0.4559について

$$\log_{10} 2 < 0.4559 < \log_{10} 3$$

が成り立つので、

$$2 \cdot 10^{10} < \frac{5}{3} \cdot 4^{16} < 3 \cdot 10^{10}$$

となる。よって、 $\frac{5}{3} \cdot 4^{17}$ は最高位の数字が2以上3未満である11桁の数であるとわかる。

そして、

$$10 < \frac{158}{3} < 10^2$$

であるから、 $\frac{5}{3} \cdot 4^{17}$ から $\frac{158}{3}$ を引くことによる桁数の変化は無い。したがって、 S_{17} の桁数は11桁となり、問題文の条件を満たさない。

[3] $n \geq 18$ のとき

$$a_n = 5 \cdot 4^{n-1} - 3 > 0$$

であるから、 $S_n > S_{17}$ となる。よって、 S_n は11桁以上の数となるので、問題文の条件を満たさない。

以上[1][2][3]より、 S_n が10桁の自然数となる最大の n は16である。

問Ⅲ

- (1)

$\square$ ア	1
$\square$ イ	7
$\square$ ウ	9
$\square$ エ	3

$\square$ ホ	4
$\square$ ニ	1
$\square$ ハ	4

$\square$ ヘ	2
$\square$ ニ	6
$\square$ ヤ	1
- (2) $\square$ コ 9 $\square$ ケ 4
- (3)

三角形 ABP の面積 $S(t)$ が S の半分になるので、

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2}S \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{2}(2t^2+t-1) &= \frac{9}{8} \\ \Leftrightarrow 8t^2+4t-1 &= 0 \\ \therefore t &= \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

(答) $t = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{4}$

【解説】

(1)

交点 A, B の座標を求める。2 次曲線 C と直線 l を連立すると、

$$\begin{aligned} -4x^2+4 &= 2x+2 \\ \Leftrightarrow 2x^2+x-1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x-1)(x+1) &= 0 \\ \therefore x &= -1, \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$x_1 < x_2$ であるので、

$$x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}$$

となる。 x_1, x_2 の値を直線 l の式に代入して点 A, B の座標を求めると、

$$A(-1, 0), B\left(\frac{1}{2}, 3\right)$$

となる。したがって、 $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} \\ &= (-t-1, 4t^2-4) \\ \overrightarrow{PB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} \\ &= \left(-t+\frac{1}{2}, 4t^2-1\right) \end{aligned}$$

と表わされる。ここで、三角形 ABP の面積を $S(t)$ と置くと、 $S(t)$ は

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \left| (-t-1)(4t^2-1) - (4t^2-4)\left(-t+\frac{1}{2}\right) \right| \\ &= \frac{1}{2} |-6t^2-3t+3| \\ &= \frac{3}{2} |-(2t-1)(t+1)| \end{aligned}$$

となる。 t は $x_1 < t < x_2$ であるから、

$$-1 < t < \frac{1}{2}$$

であり、この範囲において

$$-(2t-1)(t+1) > 0$$

となるので、

$$S(t) = -\frac{3}{2}(2t-1)(t+1)$$

である。そして、

$$\begin{aligned} S(t) &= -\frac{3}{2}(2t-1)(t+1) \\ &= -\frac{3}{2}(2t^2+t-1) \\ &= -\frac{3}{2} \left\{ 2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} \right\} \end{aligned}$$

と変形できるので、 $S(t)$ は $t = -\frac{1}{4}$ で最大値をとり、その値は

$$S\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{27}{16}$$

である。このとき、 $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ は

$$\overrightarrow{PA} = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{15}{4}\right), \overrightarrow{PB} = \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$$

であるから、 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= -\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \left(-\frac{15}{4}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

となる。また、 $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ の大きさは

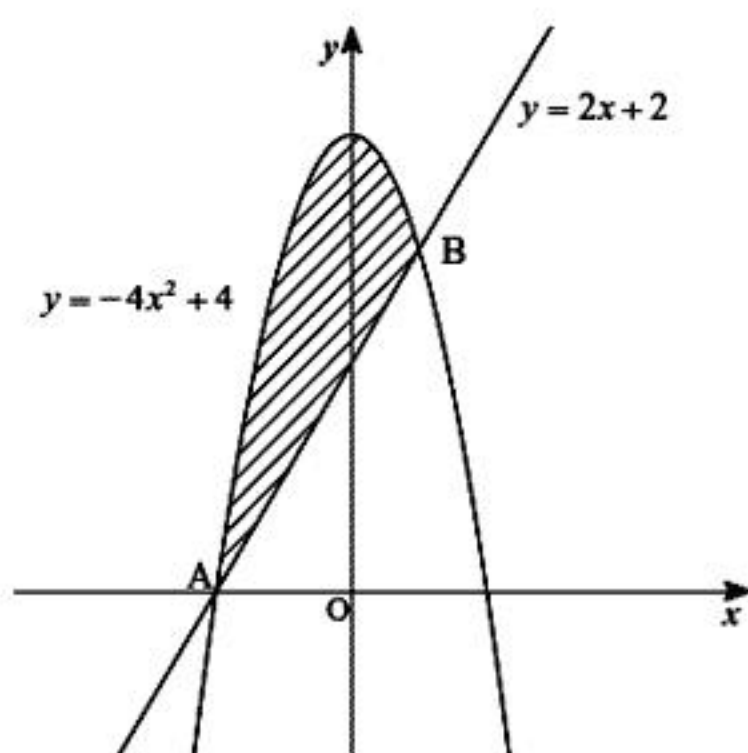
$$|\overrightarrow{PA}| = \frac{3\sqrt{26}}{4}, |\overrightarrow{PB}| = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

となる。したがって、 $\cos \angle APB$ は

$$\begin{aligned} \cos \angle APB &= \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}|} \\ &= \frac{\frac{9}{4}}{\frac{3\sqrt{26}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4}} \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{13}}{13} \end{aligned}$$

となる。

(2)



求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \{(-4x^2+4) - (2x+2)\} dx \\ &= -4 \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1) dx \\ &= -4 \times \left(-\frac{1}{6}\right) \times \left\{\frac{1}{2} - (-1)\right\}^3 \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

となる。