

[I]

(1)	B	(2)	J	(3)	U	(4)	X	(5)	U
(6)	Q								

1

$${}^4C_3 \left(\frac{2}{6}\right)^3 \left(\frac{4}{6}\right) + \left(\frac{2}{6}\right)^4 = \frac{1}{9} \cdots \boxed{(1)} \boxed{(2)}$$

2

$y' = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$ より, 増減表は下のとおり.

x	...	0	...	1	...
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって, 極大点 $(0, 1)$ と極小点 $(1, 0)$ を結んだ直線の傾きは -1 .
このとき曲線の微分係数が -1 となる点の x 座標は,

$$6x^2 - 6x = -1$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 6x = -1$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6} \cdots \boxed{(3)} \boxed{(4)}$$

3

与式より $3\vec{x} + 5\vec{y} = -7\vec{z}$.

両辺を 2 乗して,

$$9|\vec{x}|^2 + 30\vec{x} \cdot \vec{y} + 25|\vec{y}|^2 = 49|\vec{z}|^2$$

$$\therefore \vec{x} \cdot \vec{y} = \frac{1}{2} \cdots \boxed{(5)} \quad (\because |\vec{x}| = |\vec{y}| = |\vec{z}| = 1)$$

また,

$$\cos \theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| |\vec{y}|} = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta \leq 180^\circ \text{ より } \theta = 60^\circ \cdots \boxed{(6)}$$

[II]

ア	4	イ	3	ウ	1	エ	1	オ	4
カ	3	キ	4	ク	4	ケコ	13	サ	1
シス	13	セ	5	ソ	6	タ	3	チ	3
ツ	2	テ	0	ト	4				

1

$y = -(x - 1)(x - 3)$ より交点の x 座標は 1, 3 となるので,

$$S = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) \, dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_1^3$$

$$= \frac{4}{3} \cdots \boxed{\text{ア}} \boxed{\text{イ}}$$

このとき, $-x^2 + 4x - 3 - mx = -(x - a)(x - b) \cdots \textcircled{1}$ とおくと, a, b は曲線と直線との交点の x 座標となるので, 囲まれる面積は $\frac{1}{6}(a - b)^3$ となる. よって,

$$(a - b)^3 = 6 \times \frac{1}{8} \times S = 1 \cdots \boxed{\text{ウ}}$$

ここで, a, b は実数であるから $a - b = 1 \cdots \boxed{\text{エ}}$

また, $\textcircled{1}$ の右辺は $-x^2 + (a + b)x - ab$ となるので, 係数を比較して

$$a + b = 4 - m \cdots \boxed{\text{オ}} \qquad ab = 3 \cdots \boxed{\text{カ}}$$

これを $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab \cdots \boxed{\text{キ}}$ に代入して,

$$(4 - m)^2 = 1^2 + 4 \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 8m + 3 = 0$$

$$\therefore m = 4 \pm \sqrt{13} \cdots \boxed{\text{ク}} \boxed{\text{ケコ}}$$

よって,

$$a = \frac{1}{2} \{(a + b) + (a - b)\} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2} \cdots \boxed{\text{サ}} \boxed{\text{シス}}$$

$$b = \frac{1}{2} \{(a + b) - (a - b)\} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

ここで, S は $x > 0$ の範囲にあるので $a > 0$ かつ $b > 0$.
したがって,

$$a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \qquad b = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \cdots \boxed{\text{セ}}$$

このとき, $m = 4 - (a + b) = 4 - \sqrt{13} \cdots \boxed{\text{ソ}}$

2

(1)

$a > 1$ より $y = a^x$ のグラフは単調増加となるので, $b \leq c$ のとき $a^b \leq a^c$ となる. $\cdots \boxed{\text{タ}}$

一方, $y = \log_a x$ のグラフも単調増加となるので

$$\log_a b \leq \log_a c \cdots \boxed{\text{チ}}$$

(2)

$a^c = bc$ の両辺に a を底とする対数をとって,

$$\log_a a^c = \log_a bc \Leftrightarrow c = \log_a b + \log_a c \Leftrightarrow c - \log_a c = \log_a b$$

$a < b$ のとき $\log_a b > \log_a a = 1$ より, $c - \log_a c > 1 \cdots \boxed{\text{ツ}}$

(3)

$a^b > 0$ より,

$$1 - b \log_c a = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{b}{\log_a c} = 0$$

$$\therefore b = \log_a c \cdots \boxed{\text{テ}}$$

(4)

与式より,

$$b \log_a c \leq b \log_a (b \log_a c) \Leftrightarrow \log_a c \leq \log_a (b \log_a c)$$

$a > 1$ より $y = \log_a x$ のグラフは単調増加なので,

$$c \leq b \log_a c = \frac{b}{\log_c a} \qquad \therefore b \geq c \log_c a \cdots \boxed{\text{ト}}$$

[III]

1

$n \geq 1$ に対して, $n+1 \leq 2^{n-1}+1$ すなわち $2^{n-1}-n \geq 0 \cdots (*)$ となることを示せばよい.

(i) $n=1$ のとき, $2^{1-1}-1=0 \geq 0$ となって $(*)$ は成り立つ.

(ii) $n=k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) のとき, $(*)$ が成り立つと仮定すると,

$$2^{k-1}-k \geq 0 \text{ より, } 2^k \geq 2k$$

よって,

$$2^k-(k+1) \geq 2k-(k+1)=k-1 \geq 0$$

となり, $n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ.

(i), (ii) より, $n \leq x < n+1$ なる実数 x に対して, $x < 2^{n-1}+1$ となることが示された. Q.E.D.

2

$n \leq x < n+1$ を満たす自然数 n を考えると, 1 より $x < 2^{n-1}+1$ よって, $2x < 2^n+2 \leq 2^x+2$ ($\because x \geq n$)

すなわち, あらゆる x について $2^x+2 > 2x$ が成り立つので, $y=2^x+2$ と $y=2x$ は共有点をもたない. Q.E.D.