

[1]

ア	⑥	イ	⑤	ウ	④	エ	①	オ	⑦
カ	⑥	キ	④	ク	④	ケ	④	コ	④
サ	④	シ	⑥						

(1)

$f'(x) = \log(f(x))$ より,

$$f''(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$f'''(x) = \frac{f''(x)f(x) - \{f'(x)\}^2}{\{f(x)\}^2}$$

よって,

$$f'(0) = \log(f(0)) = \log \sqrt{e} = \frac{1}{2} \cdots \boxed{\text{ア}}$$

$$f''(0) = \frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{1}{2\sqrt{e}} \cdots \boxed{\text{イ}}$$

$$f'''(0) = \frac{f''(0)f(0) - \{f'(0)\}^2}{\{f(0)\}^2} = \frac{1}{4e} \cdots \boxed{\text{ウ}}$$

(2)

$z = a + bi$ (a, b は実数) とおくと, $z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$.

よって, $a^2 - b^2 = -15, 2ab = -8$

このとき第2式より $b = -\frac{4}{a}$ を第1式に代入すると,

$$a^2 - \left(-\frac{4}{a}\right)^2 = -15$$

$$\iff a^4 + 15a^2 - 16 = 0$$

$$\iff (a+1)(a-1)(a^2+16) = 0$$

a は実数なので $a = \pm 1$

ゆえに $z = 1 - 4i$ または $z = -1 + 4i$. $\cdots \boxed{\text{エ}} \boxed{\text{オ}}$

(3)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix} = O$$

よって, $c = a, d = b$. また,

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & -a+b \\ a-b & -a+b \end{pmatrix} \neq O$$

より $a \neq b$. ここで, a, b は 1 または -1 のいずれかであるから, $b = -a$.

$$\text{よって, } B = \begin{pmatrix} a & -a \\ a & -a \end{pmatrix}.$$

$$\text{このとき, } BA = \begin{pmatrix} 2a & -2a \\ 2a & -2a \end{pmatrix} = 2B \cdots \boxed{\text{カ}}$$

また,

$$B^2 = \begin{pmatrix} a & -a \\ a & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -a \\ a & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots \boxed{\text{キ}} \boxed{\text{ク}} \boxed{\text{ケ}} \boxed{\text{コ}}$$

(4)

$$f(x) = (1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha) \cos x - (\sin \alpha + \sin 2\alpha) \sin x$$

これが, 任意の x で一定の値 c をとるのは,

$$1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha = 0 \quad \text{かつ} \quad \sin \alpha + \sin 2\alpha = 0$$

が成り立つときで, このとき $c = 0 \cdots \boxed{\text{サ}}$. ここで,

$$1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha = 2 \cos \alpha \left(\cos \alpha + \frac{1}{2} \right)$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \left(\cos \alpha + \frac{1}{2} \right)$$

$\sin \alpha = 0$ かつ $\cos \alpha = 0$ を満たす α は存在しないので

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2} \text{ となり, } 0 \leq \alpha \leq \pi \text{ より } \alpha = \frac{2}{3}\pi \cdots \boxed{\text{シ}}$$

[II]

あ	$m < 2 - \sqrt{15}, 2 + \sqrt{15} < m$
い	$m^2 - 4m - 11$
う	$\sqrt{5}$
え	$\frac{1}{6}$

(1)

ℓ の方程式を m を使って表すと, $y = mx - m - \frac{11}{4}$

$y = x^2$ と連立して y を消去すると

$$x^2 - mx + \left(m + \frac{11}{4}\right) = 0 \dots \textcircled{1}$$

これが異なる 2 つの実数解をもつような m の範囲を求める. 判別式を D とおくと,

$$D = m^2 - 4\left(m + \frac{11}{4}\right) = m^2 - 4m - 11 > 0$$

$$\therefore m < 2 - \sqrt{15}, 2 + \sqrt{15} < m \dots \boxed{\text{あ}}$$

(2)

$$\textcircled{1} \text{ の解は } x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4m - 11}}{2}$$

これが A, B の x 座標となり, A, B は傾き m の直線上にあるので,

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{m^2 + 1} \left(\frac{m + \sqrt{m^2 - 4m - 11}}{2} - \frac{m - \sqrt{m^2 - 4m - 11}}{2} \right) \\ &= \sqrt{(m^2 + 1)(m^2 - 4m - 11)} \dots \boxed{\text{い}} \end{aligned}$$

(3)

i) $m < 2 - \sqrt{15}$ のとき

m が小さくなるほど $\overline{AB}$ は大きくなるので, $\overline{AB}$ が最小となる整数 m は $m = -2$ で, このとき $\overline{AB} = \sqrt{5}$

ii) $m > 2 + \sqrt{15}$ のとき

m が大きくなるほど $\overline{AB}$ は大きくなるので, $\overline{AB}$ が最小となる整数 m は $m = 6$ で, このとき $\overline{AB} = \sqrt{37}$

i) ii) より $m = -2$ で $\overline{AB}$ は最小値 $\sqrt{5}$ をとる. $\dots \boxed{\text{う}}$

このとき, ℓ の方程式は $y = -2x - \frac{3}{4}$, 交点の x 座標は $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$ となるので, AB と C とで囲まれた図形の面積は,

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} \left(-x^2 - 2x - \frac{3}{4} \right) dx = \frac{1}{6} \dots \boxed{\text{え}}$$

[III]

お	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	か	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	き	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	<	$2 + \sqrt{2}$
---	----------------------	---	-----------------------	---	----------------------	---	----------------

(1)

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

よって、点 P_n を原点まわりに α だけ回転し、 x 座標と y 座標をそれぞれ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍した点が点 P_{n+1} である。ここで、 α は

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \sin \alpha = \frac{1}{3} \text{ である.}$$

ゆえに、

$$p_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} p_n \cdots \boxed{\text{お}}, \cos \theta_n = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdots \boxed{\text{か}}$$

$$\ell_n = \sqrt{p_n^2 + p_{n+1}^2 - 2p_n p_{n+1} \cos \theta_n} = \frac{\sqrt{6}}{6} p_n \cdots \boxed{\text{き}}$$

(2)

$$p_1 = \sqrt{6} \text{ より } p_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1} \cdot \sqrt{6}$$

よって、

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \ell_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1} = 2 + \sqrt{2} \cdots \boxed{\text{<}} \end{aligned}$$

[IV]

(1)

$$\begin{aligned}\int_0^x s e^{2s} ds &= \left[\frac{1}{2} s e^{2s} \right]_0^x - \frac{1}{2} \int_0^x e^{2s} ds \\ &= \left[\frac{1}{2} s e^{2s} - \frac{1}{4} e^{2s} \right]_0^x \\ &= \frac{1}{4} (2x - 1) e^{2x} + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

(2)

$0 \leq x \leq 2$ のとき, $0 \leq s \leq x$ より, $g(s) = s$

$$f(x) = e^{-2x} \left(\frac{3}{4} + \int_0^x e^{2s} ds \right) = e^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

ここで, $f'(x) = -2e^{-2x} + \frac{1}{2}$ より, $f(x)$ の増減は下のとおり.

x	0	...	$\log 2$	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

ここで, $f(0) = \frac{3}{4}$, $f(2) = \frac{3}{4} + \frac{1}{e^4}$ より, 最大値は $x = 2$ のとき $\frac{3}{4} + \frac{1}{e^4}$.

一方, 最小値は $x = \log 2$ のとき $\frac{1}{2} (\log 2 - 1)$.

(3)

$x > 2$ のとき,

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{-2x} \left(\frac{3}{4} + \int_0^2 s e^{2s} ds + \int_0^2 e - 2s ds \right) \\ &= \left(1 - \frac{e^4}{4} \right) e^{-2s} + 1\end{aligned}$$

ここで, $1 - \frac{e^4}{4} < 0$, $e^{-2x} > 0$ より $f(x)$ の値が $x > 2$ において 1 より大きくなることはない.