

【I】

〔解答〕

- (1) 1 H 2 H
 (2) 3 B 4 J
 (3) 5 F 6 C
 (4) 7 F 8 I

〔解説〕

(1)

$$\int_x^a f(t)dt = x^2 - 2x \quad \dots \textcircled{1}$$

の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} -f(x) &= 2x - 2 \\ \Leftrightarrow f(x) &= -2x + 2 \end{aligned}$$

となる。また、 $\textcircled{1}$ に $x = a$ を代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= a^2 - 2a \\ \Leftrightarrow a(a - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 2 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left\{\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{3}\pi\right)\right\}$$

であるから、関数 $y = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ のグラフは $y = 2\cos\frac{x}{2}$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{2}{3}\pi$ だけ平

行移動したものであり、正で最小の周期は $2\pi \div \frac{1}{2} = 4\pi$ である。

(3)

A 空港と B 空港の時差は $\frac{90+135}{360} \times 24 = 15$ 時間あり、B 空港の方が時刻が進んでいる。よって、

飛行機が B 空港の上空 10km に到着したときの A 空港の上空 10km における現地時間は 2 月 16 日 2:00 となるから、必要な飛行時間は 14 時間である。飛行距離は半径

$(6380+10) \times \cos 30^\circ \text{ km}$ の円周上の中心角 $360^\circ - (90^\circ + 135^\circ) = 135^\circ$ の弧の長さにあたるから

$$\begin{aligned} 2\pi \times \left\{ (6380+10) \times \cos 30^\circ \right\} \times \frac{135^\circ}{360^\circ} &= 2\pi \times 6390 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{8} \\ &\approx 13016.9 \text{ km} \end{aligned}$$

となる。よって、必要な飛行速度は

$$13017 \div 14 \approx 930 \text{ km/時}$$

である。

(4)

サイコロの目の出方は同様に確からしいとする。 x の 2 次方程式 $x^2 - (2a+b)x + 12 = 0$ の判別式を D とおくと、この方程式が虚数解をもつのは

$$\begin{aligned} D &< 0 \\ \Leftrightarrow (2a+b)^2 - 48 &< 0 \\ \Leftrightarrow |2a+b| &< 4\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow 2a+b &< 4\sqrt{3} \quad (\because a, b > 0) \end{aligned}$$

となるときである。 $6 < 4\sqrt{3} < 7$ であるから、これを満たす (a, b) の値の組は

$$(a, b) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2)$$

の 6 通りあり、このようになる確率は

$$\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$$

である。また、 x の 2 次方程式 $x^2 - (2a+b)x + 12 = 0$ が実数解をもつとき、その解を α, β ($\alpha \leq \beta$) とおくと、解と係数の関係より

$$\begin{cases} 2a+b = \alpha + \beta \\ 12 = \alpha\beta \end{cases}$$

となり、 $a, b > 0$ より

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &> 0, \alpha\beta > 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &> 0, \beta > 0 \end{aligned}$$

となるから、この方程式が整数解のみをもつとき、この解は自然数である。よって、 $\alpha\beta = 12$ のとき

$$(\alpha, \beta) = (1, 12), (2, 6), (3, 4)$$

となる。

[1] $(\alpha, \beta) = (1, 12)$ のとき

以上の条件を満たす (a, b) の組は

$$\begin{aligned} 2a+b &= 13 \\ \Leftrightarrow (a, b) &= (4, 5), (5, 3), (6, 1) \end{aligned}$$

の 3 通りある。

[2] $(\alpha, \beta) = (2, 6)$ のとき

以上の条件を満たす (a, b) の組は

$$\begin{aligned} 2a+b &= 8 \\ \Leftrightarrow (a, b) &= (1, 6), (2, 4), (3, 2) \end{aligned}$$

の 3 通りある。

[3] $(\alpha, \beta) = (3, 4)$ のとき

以上の条件を満たす (a, b) の組は

$$\begin{aligned} 2a+b &= 7 \\ \Leftrightarrow (a, b) &= (1, 5), (2, 3), (3, 1) \end{aligned}$$

の 3 通りある。

以上、[1], [2], [3]より、 x の 2 次方程式 $x^2 - (2a+b)x + 12 = 0$ が整数解のみをもつような (a, b) の組は全部で 9 通りあるから、このようになる確率は

$$\frac{9}{6^2} = \frac{1}{4}$$

である。

〔II〕

〔解答〕

$$(1) \quad 101 \quad \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

$$(2) \quad 9 \quad B \quad 10 \quad A$$

〔解説〕

(1)

1行目、 k 列目の数から k 行目、1列目の数までの斜めに並ぶ数字の個数は k 個であるから、
1行目、 n 列目の数 a_n は $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n-1} k + 1 \\ &= \frac{(n-1)n}{2} + 1 \\ &= \frac{n^2 - n + 2}{2} \end{aligned}$$

であり、これは $n=1$ のときも $a_1=1$ を満たすから、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

である。

(2)

$a_{63} = 1954$, $a_{64} = 2017$ より、自然数2010は1行目、63列目の数から63行目、1列目の数までの斜めに並ぶ数字に含まれ、その数字の中で後ろから7番目の数である。よって、自然数2010は

$$63 - 7 + 1 = 57 \text{ 行目}$$

$$1 + 7 - 1 = 7 \text{ 列目}$$

に入る。

〔III〕

〔解答〕

- (1) 11 I
(2) 12 H
(3) 102 $\frac{928}{3}$

〔解説〕

(1)

$\overrightarrow{AB} = (14, 3, 3\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AC} = (-6, 7, 7\sqrt{3})$ より $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ となるから, $\theta = 90^\circ$ である。よって

$$\cos \theta = 0$$

である。

(2)

$\overrightarrow{AD} = (0, -4\sqrt{3}, 4)$ より $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ となるから, $\angle CAD = 90^\circ$ である。よって, $\triangle ACD$ の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AD}| &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{58} \cdot 8 \\ &= 8\sqrt{58}\end{aligned}$$

である。

(3)

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ となるから $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ である。よって, 四面体 ABCD の底面を $\triangle ACD$ としたとき, 高さは AB となるから, この四面体の体積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \cdot \triangle ACD \cdot |\overrightarrow{AB}| &= \frac{1}{3} \cdot 8\sqrt{58} \cdot 2\sqrt{58} \\ &= \frac{928}{3}\end{aligned}$$

である。

〔IV〕

〔解答〕

(1) 13 H 14 I

(2) 15 G

〔解説〕

(1)

点 $P(-1, 4)$ を通る直線は、 $x = -1$ または $y = a(x+1)+4$ (a は実数) と表される。直線 $x = -1$ と

円 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 10$ の共有点の y 座標は

$$\begin{aligned} (-1-3)^2 + (y-2)^2 &= 10 \\ \Leftrightarrow (y-2)^2 &= -6 \end{aligned}$$

となり、これを満たす実数 y が存在しないことから共有点は存在しない。次に、円

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 10$ は中心 $(3, 2)$ 、半径 $\sqrt{10}$ の円であるから、この円と直線 $y = a(x+1)+4$

が接するとき、円の中心と直線の距離と円の半径が一致するから

$$\begin{aligned} \frac{|a(3+1)-2+4|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}} &= \sqrt{10} \\ \Leftrightarrow |4a+2| &= \sqrt{10(a^2+1)} \\ \Leftrightarrow (4a+2)^2 &= 10(a^2+1) \\ \Leftrightarrow 3a^2+8a-3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3a-1)(a+3) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1}{3}, -3 \end{aligned}$$

となる。よって、点 $P(-1, 4)$ から円 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 10$ に引いた接線の方程式は

$$y = \frac{1}{3}(x+1)+4, y = -3(x+1)+4$$

となるから、このうち傾きが正である接線 m の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}(x+1)+4 \\ \Leftrightarrow x-3y+13 &= 0 \end{aligned}$$

である。

(2)

接線 m と x 軸の正の方向とのなす角を α ($0 \leq \alpha \leq \pi$) とおくと

$$\tan \alpha = \frac{1}{3}$$

となり、 $\tan \alpha > 0$ より α は鋭角であるから、 $\theta = \alpha$ である。よって

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 \theta}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}} \\ &= \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{aligned}$$

である。