

【I】

【解答】

最小 最大

- (1) C B
 (2) A C
 (3) B C
 (4) C B
 (5) C A
 (6) A B
 (7) A B
 (8) B C
 (9) B A
 (10) B A

【解説】

(1)

n を $0 \leq n \leq 499$ を満たす自然数とする。

$$\begin{aligned}\frac{{}_{1000}C_{n+1}}{{}_{1000}C_n} &= \frac{1000!}{\{1000-(n+1)\}!(n+1)!} \cdot \frac{(1000-n)!n!}{1000!} \\ &= \frac{1000-n}{n+1} \\ &= \frac{1001}{n+1} - 1\end{aligned}$$

である。ここで $0 \leq n \leq 499$ であることより

$$\frac{1001}{n+1} - 1 \geq \frac{1001}{499+1} - 1 > 2 - 1 = 1$$

となるから

$$\begin{aligned}\frac{{}_{1000}C_{n+1}}{{}_{1000}C_n} &> 1 \\ \therefore {}_{1000}C_{n+1} &> {}_{1000}C_n\end{aligned}$$

となる。したがって

$${}_{1000}C_0 < {}_{1000}C_1 < \cdots < {}_{1000}C_{499} < {}_{1000}C_{500}$$

となる。よって ${}_{1000}C_{800} = {}_{1000}C_{200}$ であることに注意すると

$${}_{1000}C_{800} < {}_{1000}C_{300} < {}_{1000}C_{400}$$

となる。したがって、 $C < A < B$ である。

(2)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{200} k &= \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot (200+1) \\ &= 20100\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100} 4k &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (100+1) \\ &= 20200\end{aligned}$$

である。また

$$\sum_{k=1}^{400} \sqrt{k} < \sum_{k=1}^{400} \sqrt{400} = 8000$$

である。したがって以上より

$$\sum_{k=1}^{400} \sqrt{k} < \sum_{k=1}^{200} k < \sum_{k=1}^{100} 4k$$

となる。よって、 $A < B < C$ である。

(3)

$\overline{BA} = \overline{a}$, $\overline{BC} = \overline{c}$ と置く。このとき

$$\begin{aligned}\overline{a} \cdot \overline{c} &= 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ \\ &= 1\end{aligned}$$

$$|\overline{a}|^2 = 1, |\overline{c}|^2 = 4$$

である。以上より

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{AC} &= (-\overline{a}) \cdot (\overline{c} - \overline{a}) \\ &= -\overline{a} \cdot \overline{c} + |\overline{a}|^2 \\ &= -1 + 1 \\ &= 0 \\ \overline{AB} \cdot \overline{BC} &= (-\overline{a}) \cdot \overline{c} \\ &= -1 \\ \overline{BA} \cdot \overline{BC} &= \overline{a} \cdot \overline{c} \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} < \overline{AB} \cdot \overline{AC} < \overline{BA} \cdot \overline{BC}$$

となる。よって、 $B < A < C$ である。

(4)

$b > c > 0$ より $\frac{c-b}{c} < 0$ である。また $a > b > c > 0$ より

$$0 < b - c < a - c$$

であり、 $a > b > 0$ であるから

$$0 < \frac{b-c}{a} < \frac{a-c}{b}$$

となる。したがって以上より

$$\frac{c-b}{c} < \frac{b-c}{a} < \frac{a-c}{b}$$

となる。よって、 $C < A < B$ である。

(5)

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = 4$$

である。これを用いると

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (-2)^2 - 2 \cdot 4 \\ &= -4\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\alpha^2 + \beta^2 < \alpha + \beta < \alpha\beta$$

となる。よって、 $C < B < A$ である。

(6)

ド・モルガンの法則と $n(U) = n(A \cup B)$ より

$$\begin{aligned}n(\overline{A \cap B}) &= n(\overline{A \cup B}) \\ &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned}n(A \cap \overline{B}) &= n(A) - n(A \cap B) \\ n(\overline{A} \cap B) &= n(B) - n(A \cap B)\end{aligned}$$

であり、 $n(U) > n(A) > n(B)$ であるから

$$n(\overline{A \cap B}) = 0 < n(\overline{A} \cap B) < n(A \cap \overline{B})$$

である。よって、 $A < C < B$ である。

(7)

円すいの展開図の扇形の中心角を θ とする。扇形の弧の長さと底面の円周の長さが等しいので

$$\begin{aligned}R\theta &= 2\pi r \\ \therefore \theta &= \frac{2\pi r}{R}\end{aligned}$$

である。円すいの表面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \pi r^2 + \frac{1}{2} \theta R^2 \\ &= \pi r^2 + \pi Rr \\ &= \pi r(r+R)\end{aligned}$$

となる。よって表面積はそれぞれ

$$A: S = \pi \cdot 4 \cdot (4+10) = 56\pi$$

$$B: S = \pi \cdot 3 \cdot (3+20) = 69\pi$$

$$C: S = \pi \cdot 2 \cdot (2+30) = 64\pi$$

となる。したがって、 $A < C < B$ である。

(8)

2つのサイコロの目の和は下表のようになる。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

したがって和が偶数である場合は 18 通りあるからその確率は $\frac{18}{36}$ である。また和が 8 以上で

ある場合は 15 通りあるのでその確率は $\frac{15}{36}$ である。和が 7 以下である場合は 21 通りあるので

その確率は $\frac{21}{36}$ である。したがって、 $B < A < C$ である。

(9)

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{1-i} &= \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{1+2i-1}{2} \\ &= i\end{aligned}$$

である。これより

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{1-i} a + (2+3i)b + c &= 0 \\ \Leftrightarrow ai + (2+3i)b + c &= 0 \\ \Leftrightarrow (2b+c) + (a+3b)i &= 0\end{aligned}$$

である。 a, b, c は実数であるから、

$$2b+c=0, a+3b=0$$

となる。一方、与えられた条件から

$$a+b+c=4$$

である。以上より

$$a=3, b=-1, c=2$$

である。よって、 $B < C < A$ である。

(10)

2つの放物線がともに点 $(1, m)$ を通ることより

$$a+b+c=m \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。 $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = cx^2 + ax + b$ と置くと

$$f'(x) = 2ax + b, g'(x) = 2cx + a$$

となる。したがって $x=1$ における放物線の接線の傾きがともに m より大きいことより

$$2a+b > m \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$2c+a > m \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となる。①を②、③に代入すると

$$2a+b > a+b+c$$

$$\therefore a > c$$

$$2c+a > a+b+c$$

$$\therefore c > b$$

となる。したがって $b < c < a$ となる。よって、 $B < C < A$ である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1) $n=1$

(2) $n(n+2) \leq 3^n$

(3)

$$n(n+2) \leq 3^n \quad \dots \textcircled{1}$$

とする。数学的帰納法を用いて、正の整数 n に対し、不等式①が成り立つことを証明する。

[1] $n=1$ のとき

$$(\textcircled{1} \text{の左辺}) = 1 \cdot 3 = 3$$

$$(\textcircled{1} \text{の右辺}) = 3^1 = 3$$

より、不等式①は成り立つ。

[2] $n=k$ ($k=1, 2, \dots$) において①が成り立つと仮定する。

このとき帰納法の仮定より

$$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k \geq 3\{k(k+2)\}$$

となる。ここで $k \geq 1$ であることから

$$\begin{aligned} 3\{k(k+2)\} &= 3k^2 + 6k \\ &= k^2 + 4k + 2k^2 + 2k \\ &\geq k^2 + 4k + 2 + 1 \\ &= k^2 + 4k + 3 \\ &= (k+1)(k+3) \end{aligned}$$

となる。したがって①は $n=k+1$ のときも成り立っている。

以上[1], [2]より正の整数 n に対して不等式 $n(n+2) \leq 3^n$ が成立することが示された。

(証明終)

〔解説〕

(1)

不等式

$$\log_2 n + \log_2 (n+2) \leq n \log_2 3$$

の等号が成立するとき、

$$\log_2 n + \log_2 (n+2) = n \log_2 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2 n(n+2) = \log_2 3^n$$

$$\Leftrightarrow n(n+2) = 3^n$$

である。ここで、 $n=1$ のとき上式が成り立ち、 $n \geq 2$ のとき n または $n+2$ の少なくとも一方は3の倍数でないことから3以外を素因数に持つため上式を満たさない。したがって、 $n=1$ が求める答えである。

(2)

$$\log_2 n + \log_2 (n+2) \leq n \log_2 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2 n(n+2) \leq \log_2 3^n$$

$$\Leftrightarrow n(n+2) \leq 3^n (\because \text{底 } 2 > 1)$$

となる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1) $0 < a < 2$

(2) $a \pm \sqrt{-a^2 + 2a}$

(3)

$\alpha = a - \sqrt{-a^2 + 2a}$, $\beta = a + \sqrt{-a^2 + 2a}$ と置くと, $\beta - \alpha = 2\sqrt{-a^2 + 2a}$ である。また, $\alpha \leq x \leq \beta$ において

$$(-x^2 + 2ax - 2a^2 + 4a + 1) - (x^2 - 2ax + 2a^2 + 1) = -2(x - \alpha)(x - \beta) \geq 0$$

であるのでこの範囲において常に放物線 $y = -x^2 + 2ax - 2a^2 + 4a + 1$ の方が放物線 $y = x^2 - 2ax + 2a^2 + 1$ よりも上にある。したがって 2 つの放物線で囲まれる部分の面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(-x^2 + 2ax - 2a^2 + 4a + 1) - (x^2 - 2ax + 2a^2 + 1)\} dx \\ &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{3} (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{8}{3} (-a^2 + 2a)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{8}{3} \{-(a-1)^2 + 1\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

である。 $0 < a < 2$ より, S は $a = 1$ のときに最大値 $\frac{8}{3}$ をとる。

(答) $\frac{8}{3} (a = 1)$

〔解説〕

(1)

2 つの放物線の方程式から y を消去して得られる x の 2 次方程式

$$\begin{aligned} x^2 - 2ax + 2a^2 + 1 &= -x^2 + 2ax - 2a^2 + 4a + 1 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2ax + 2a^2 - 2a &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が相異なる 2 つの実数解を持つことが, 2 つの放物線が異なる 2 点で交わるための条件である。

①の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= a^2 - 2a^2 + 2a \\ &= -a^2 + 2a \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} D &> 0 \\ \Leftrightarrow a(a-2) &< 0 \\ \therefore 0 &< a < 2 \end{aligned}$$

となる。

(2)

求める x 座標は方程式①の実数解で,

$$x = a \pm \sqrt{-a^2 + 2a}$$

である。

〔IV〕

〔解答〕

(1) $P(\cos \pi t, \sin \pi t)$

(2) $t = 2n - 1$ (n は任意の正の整数), 最大値 1

(3)

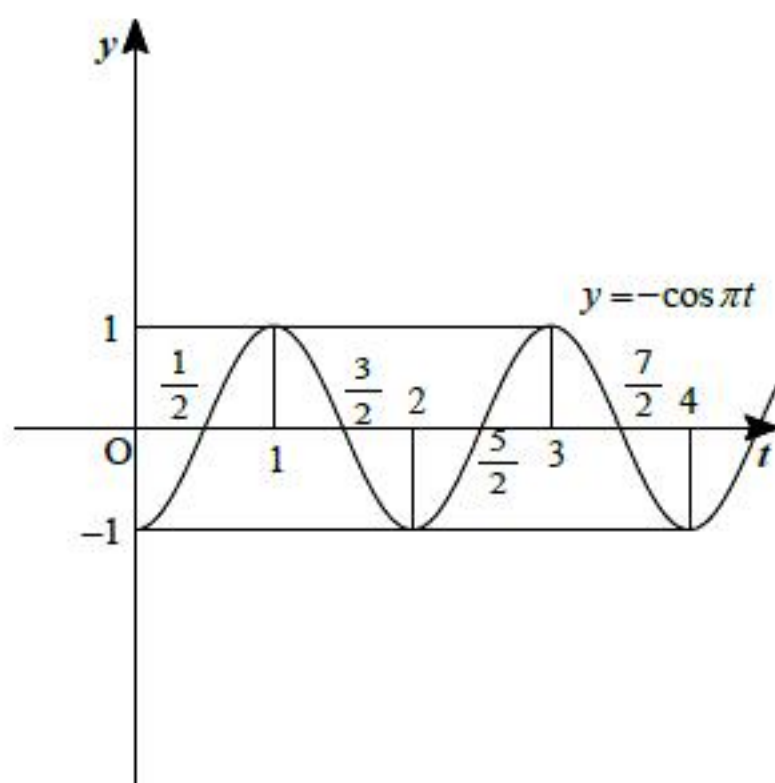
時刻 t に $\overrightarrow{OQ}$ が x 軸の正の向きとなす角度は $2\pi t + \pi$ であることから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \begin{pmatrix} \cos(2\pi t + \pi) \\ \sin(2\pi t + \pi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos 2\pi t \\ -\sin 2\pi t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= \begin{pmatrix} \cos \pi t \\ \sin \pi t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos 2\pi t \\ -\sin 2\pi t \end{pmatrix} \\ &= -\cos(2\pi t - \pi t) \\ &= -\cos \pi t\end{aligned}$$

となる。この関数のグラフは下のようになる。



(答) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = -\cos \pi t$, 前図

〔解説〕

(1)

時刻 t において動径 OP が x 軸の正の向きとなす角度は πt なので、このときの点 P の座標は $P(\cos \pi t, \sin \pi t)$ である。

(2)

ベクトルの大きさが不変であるので、内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ が最大となるのは $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ のなす角が 0 のときである。 $\overrightarrow{OQ}$ が x 軸の正の向きとなす角度は $2\pi t + \pi$ であるので、なす角が 0 になるための条件は、 n を正の整数として

$$\begin{aligned}2\pi t + \pi &= \pi t + 2n\pi \\ \Leftrightarrow t &= 2n - 1\end{aligned}$$

である。また、このとき、 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 1$ である。