

〔Ⅰ〕

〔解答〕

ア 9 イ 2 ウ 7 エ 2 オ 1
カ 2 キ 5 ク 4 ケ 2 コ 4

〔解説〕

(1)

$$\begin{cases} \alpha^2 + a\alpha + b = 0 \\ \alpha^2 + b\alpha + a = 0 \end{cases}$$
$$\therefore (a-b)(\alpha-1) = 0$$

である。 $a \neq b$ なので、

$$\alpha = 1 \qquad \cdots \cdots \boxed{\text{オ}}$$

となる。

$$\begin{aligned} 1 + a + b &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= -a - 1 \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} x^2 + ax - a - 1 &= -x^2 - (a+1)x + a \\ \Leftrightarrow 2x^2 + (2a+1)x - (2a+1) &= 0 \end{aligned}$$

となる。この判別式 $D=0$ となればよいので、

$$\begin{aligned} D &= (2a+1)^2 + 8(2a+1) \\ &= (2a+1)(2a+9) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}$$

となる。 $a = -\frac{1}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} b &= -\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 \\ &= -\frac{1}{2} \\ &= a \end{aligned}$$

となってしまうので不適である。 $a = -\frac{9}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} b &= -\left(-\frac{9}{2}\right) - 1 \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$a = -\frac{9}{2}, b = \frac{7}{2} \qquad \cdots \cdots \boxed{\text{ア}} \boxed{\text{イ}} \boxed{\text{ウ}} \boxed{\text{エ}}$$

である。

(2)

連立方程式の両辺に 10 を底とする対数をとると、

$$\begin{aligned} \log_{10}(2^x \cdot 5^y) &= 0 \\ \Leftrightarrow x \log_{10} 2 + y \log_{10} 5 &= 0 \\ \log_{10}(5^{x+2} \cdot 2^y) &= \log_{10} 4 \\ \Leftrightarrow x \log_{10} 5 + y \log_{10} 2 &= 2 \log_{10} 2 - 2 \log_{10} 5 \end{aligned}$$

となる。これらを連立して解くと、

$$x = -\log_{10} 25, y = \log_{10} 4 \qquad \cdots \cdots \boxed{\text{カ}} \boxed{\text{キ}} \boxed{\text{ク}}$$

となる。

(3)

$$\begin{aligned} x^2 + (-3x + \sqrt{10})^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 10x^2 - 6\sqrt{10}x - 9 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{3}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

であるので、

$$P\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

となる。同様に、

$$\begin{aligned} x^2 + (-x + \sqrt{2})^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

であるので、

$$Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

となる。

$$OP = OQ = 1$$

$$\begin{aligned} PQ^2 &= \left(\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= 2 - \frac{4}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

であるので、余弦定理より、

$$\cos \theta = \frac{OP^2 + OQ^2 - PQ^2}{2OP \cdot OQ} = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \cdots \cdots \boxed{\text{ケ}} \boxed{\text{コ}}$$

となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

あ	⑩	イ	2	う	①	エ	1	オ	1
カ	2	き	④	ク	3	け	①	コ	1
サ	2	し	⑤	す	⑦	セ	1	ソ	2
タ	2	チ	1	ツ	2	テ	1	ト	2
ナ	2								

〔解説〕

$y' = 2x$ であるので、 l_1, l_2 の方程式はそれぞれ

$$\begin{aligned} y &= 2s(x-s) + s^2 \\ &= 2sx - s^2 \\ y &= 2t(x-t) + t^2 \\ &= 2tx - t^2 \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} 2sx - s^2 &= 2tx - t^2 \\ \Leftrightarrow 2(t-s)x &= t^2 - s^2 \\ \therefore x &= \frac{t+s}{2} \end{aligned}$$

となるので、

$$\mathbf{R}\left(\frac{t+s}{2}, ts\right) \quad \cdots \cdot \boxed{\text{あ}} \boxed{\text{イ}} \boxed{\text{ウ}}$$

である。

$$\begin{aligned} S &= \int_s^{\frac{t+s}{2}} \{x^2 - (2sx - s^2)\} dx + \int_{\frac{t+s}{2}}^t \{x^2 - (2tx - t^2)\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-s)^3 \right]_s^{\frac{t+s}{2}} + \left[\frac{1}{3}(x-t)^3 \right]_{\frac{t+s}{2}}^t \\ &= \frac{1}{12}(t-s)^3 \quad \cdots \cdot \boxed{\text{エ}} \boxed{\text{オカ}} \boxed{\text{き}} \boxed{\text{ク}} \end{aligned}$$

となる。 l_2 と x 軸正方向とのなす角を θ とすると、

$$\tan \theta = 2t \quad \cdots \cdot \boxed{\text{け}}$$

である。 l_1 と x 軸正方向とのなす角は $\theta + 45^\circ$ であるから、

$$\begin{aligned} \tan(\theta + 45^\circ) &= 2s \\ s &= \frac{1}{2} \tan(\theta + 45^\circ) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2t+1}{2t-1} \quad \cdots \cdot \boxed{\text{コ}} \boxed{\text{サ}} \boxed{\text{し}} \boxed{\text{す}} \end{aligned}$$

となる。 $t > s$ より、

$$t-s = \frac{4t^2+1}{2(2t-1)} > 0$$

である。 $4t^2+1 > 0$ より、

$$\begin{aligned} 2t-1 &> 0 \\ \therefore t &> \frac{1}{2} \quad \cdots \cdot \boxed{\text{セ}} \boxed{\text{ソ}} \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} t-s &= \frac{4t^2+1}{2(2t-1)} \\ &= 1 + \frac{2t-1}{2} + \frac{1}{2t-1} \\ &\geq 1 + 2\sqrt{\frac{2t-1}{2} \cdot \frac{1}{2t-1}} \quad (\text{相加相乗平均の関係より}) \\ &= 1 + \sqrt{2} \quad \cdots \cdot \boxed{\text{ツ}} \end{aligned}$$

となる。等号成立条件を調べる。

$$\begin{aligned} \frac{2t-1}{2} &= \frac{1}{2t-1} \\ \Leftrightarrow (2t-1)^2 &= 2 \\ \therefore t &= \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となり、 $t > \frac{1}{2}$ より、

$$t = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \quad \cdots \cdot \boxed{\text{テ}} \boxed{\text{ト}} \boxed{\text{ナ}}$$

のときである。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

あ	④	い	④	う	⑩	エ	3	お	⑦
カ	3	き	⑥	ク	3	け	⑤	コ	2
サ	1	し	⑦	ス	3	セ	2	そ	
タ	3	チ	2	つ	⑩	て	⑩	と	⑩
な	①								

〔解説〕

(1)

[1] 3 人が硬貨を投げるとき、
1 人が表の確率は、

$${}_3C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8} \quad \dots \text{あ}$$

であり、2 人が表の確率は、

$${}_3C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8} \quad \dots \text{い}$$

である。よって、あいこになる確率は、

$$1 - \frac{3}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$

である。

[2] 2 人が硬貨を投げるとき、
1 人が表の確率は、

$${}_2C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad \dots \text{う}$$

である。よって、あいこになる確率は、

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

である。

(2)

3 人のあいこが 2 回続き、3 回目で 1 人表が出る確率は、

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{128} \quad \dots \text{エ お}$$

3 人があいこの後 2 人が残り、3 回目で 1 人表が出る確率は、

$$\frac{1}{4} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{64} \quad \dots \text{カ き}$$

である。2 人が残った後あいこになり、3 回目で 1 人表が出る確率は、

$$\frac{3}{8} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{32} \quad \dots \text{ク け}$$

である。したがって、

$$p_3 = \frac{3}{128} + \frac{3}{64} + \frac{3}{32} = \frac{21}{128} \quad \dots \text{コサ し}$$

である。

(3)

3 人のあいこが $n-1$ 回続き、 n 回目で 1 人表が出る確率は、

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \dots \text{ス セ そ}$$

である。3 人のあいこが $k-1$ 回続き、 k 回目で 2 人残った後あいこが $n-k-1$ 回続き、 n 回目で 1 人表が出る確率は、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \times \frac{3}{8} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \dots \text{タ チ つ て} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{3}{2} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\} \quad \dots \text{ト な} \end{aligned}$$

である。