

[I]

〔解答〕

ア	3	イウ	88	エオ	32	カキ	18	クケ	11
コサ	11	シ	7	ス	9	セ	2		

〔解説〕

(1)

ハミルトン・ケーリーの定理より

$$A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)E = O$$

であるから、

$$\text{tr}(A) = 2 + 1 = 3 \quad \dots \boxed{\text{ア}}$$

となる。

$$\begin{aligned} & x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ &= (x^3 + 4x^2 + 12x + 33)(x^2 - 3x + 1) + 88x - 32 \quad \dots \boxed{\text{イウ}} \boxed{\text{エオ}} \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} & A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A + E \\ &= (A^3 + 4A^2 + 12A + 33E)(A^2 - 3A + E) + 88A - 32E \\ &= 8(11A - 4E) \\ &= 8 \begin{pmatrix} 18 & 11 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} \quad \dots \boxed{\text{カキ}} \boxed{\text{クケ}} \boxed{\text{コサ}} \boxed{\text{シ}} \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} &= \frac{2 \sin^2 \left(\frac{3}{2}x \right)}{x^2} \\ &= \frac{9}{2} \left\{ \frac{\sin \left(\frac{3}{2}x \right)}{\frac{3}{2}x} \right\}^2 \\ &\rightarrow \frac{9}{2} \quad (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

であるので、 $a = \frac{9}{2}$ である。 \dots \boxed{\text{ス}} \boxed{\text{セ}}

[Ⅱ]

[解答]

ア ③ イ ④ ウ ⑤ エ ④ オ ⑤

[解説]

$n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} P_n &= 0.7P_{n-1} + 0.3(1 - P_{n-1}) \\ &= 0.3 + 0.4P_{n-1} \quad \cdots \boxed{\text{ア}} \boxed{\text{イ}} \end{aligned}$$

$$\therefore P_n - 0.5 = 0.4(P_{n-1} - 0.5)$$

である。ここで、 $P_1 = 0.3$ より

$$\begin{aligned} P_n &= (0.4)^{n-1}(0.3 - 0.5) + 0.5 \\ &= 0.5(1 - 0.4^n) \quad \cdots \boxed{\text{ウ}} \boxed{\text{エ}} \end{aligned}$$

となる。このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0.5 \left(\because \lim_{n \rightarrow \infty} 0.4^n = 0 \right) \quad \cdots \boxed{\text{オ}}$$

である。

[Ⅲ]

[解答]

ア ⑦ イ ⑥ ウ ⑧ エ ⑤ オ ⑥

[解説]

$$f(a) = \int_0^a e^x (a-x) dx + \int_a^1 e^x (x-a) dx$$

である。

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = (x-1) e^x + C$$

であるので、

$$\begin{aligned} f(a) &= [a e^x]_0^a - [(x-1) e^x]_0^a + [(x-1) e^x]_a^1 - [a e^x]_a^1 \\ &= 2e^a - (e+1)a - 1 \quad \dots \boxed{\text{ア}} \boxed{\text{イ}} \end{aligned}$$

となる。

$$f'(a) = 2e^a - (e+1)$$

となるので、 $f(x)$ の増減表は以下の通りになる。

a	0	...	$\log\left(\frac{e+1}{2}\right)$	...	1
$f'(a)$		-	0	+	
$f(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって、 $f(a)$ は $a = \log\left(\frac{e+1}{2}\right)$ のとき最小となり、 $\dots \boxed{\text{ウ}}$

$$\begin{aligned} f\left(\log\left(\frac{e+1}{2}\right)\right) &= 2 \cdot \frac{e+1}{2} - (e+1) \cdot \log\left(\frac{e+1}{2}\right) - 1 \\ &= e - (e+1) \cdot \log\left(\frac{e+1}{2}\right) \quad \dots \boxed{\text{エ}} \boxed{\text{オ}} \end{aligned}$$

である。

[IV]

[解答]

ア ③ イ ⑧ ウ ⑥ エ ⑦ オ ⑦
カ ⑦ キ ⑨ ク ⑨ ケ ⑤

[解説]

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の点 (x_0, y_0) における接線の方程式は

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \quad \dots \boxed{\text{ア}} \boxed{\text{イ}}$$

である。 $\overrightarrow{\text{CA}} = (x_0 - x_2, y_0 - y_2)$, $\overrightarrow{\text{CB}} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ より

$$\begin{aligned} & |\overrightarrow{\text{CA}}|^2 |\overrightarrow{\text{CB}}|^2 - (\overrightarrow{\text{CA}} \cdot \overrightarrow{\text{CB}})^2 \\ &= \{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2\} \{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\} - \{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2) + (y_0 - y_2)(y_1 - y_2)\}^2 \\ &= (x_0 - x_2)^2 (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 (y_0 - y_2)^2 - 2(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(y_0 - y_2)(y_1 - y_2) \\ &= \{(x_0 - x_2)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_0 - y_2)\}^2 \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{\text{CA}}|^2 |\overrightarrow{\text{CB}}|^2 - (\overrightarrow{\text{CA}} \cdot \overrightarrow{\text{CB}})^2} \\ &= \frac{1}{2} |(x_0 - x_2)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_0 - y_2)| \quad \dots \boxed{\text{ウ}} \boxed{\text{エ}} \end{aligned}$$

となる。B, C は l 上の点であるから、

$$\begin{aligned} & \frac{x_0}{a^2} x_1 + \frac{y_0}{b^2} y_1 = t = \frac{x_0}{a^2} x_2 + \frac{y_0}{b^2} y_2 \\ & \Leftrightarrow y_1 - y_2 = -\frac{b^2}{y_0} \cdot \frac{x_0}{a^2} (x_1 - x_2) \quad \dots \boxed{\text{オ}} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |(x_0 - x_2)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_0 - y_2)| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{y_0} \left| \left(\frac{x_0}{a^2} x_2 + \frac{y_0}{b^2} y_2 \right) - \left(\frac{x_0}{a^2} x_0 + \frac{y_0}{b^2} y_0 \right) \right| \cdot |x_1 - x_2| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{y_0} \cdot |t - 1| \cdot |x_1 - x_2| \quad \dots \boxed{\text{カ}} \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\frac{x_0}{a^2} x + \frac{y_0}{b^2} y = t \Leftrightarrow y = \frac{b^2}{y_0} \left(t - \frac{x_0}{a^2} x \right)$$

を楕円 E の式に代入すると、

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \cdot \frac{b^4}{y_0^2} \left(t - \frac{x_0}{a^2} x \right)^2 = 1 \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \right) x^2 - 2tx_0 x + a^2 \left(t^2 - \frac{y_0^2}{b^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

である。 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ であるから、解と係数の関係より、

$$x_1 + x_2 = 2tx_0, \quad x_1 x_2 = a^2 \left(t^2 - \frac{y_0^2}{b^2} \right) \quad \dots \boxed{\text{キ}}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \\ &= 4t^2 x_0^2 - 4a^2 \left(t^2 - \frac{y_0^2}{b^2} \right) \\ &= 4a^2 \frac{y_0^2}{b^2} (1 - t^2) \quad \dots \boxed{\text{ク}} \end{aligned}$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} \{S(t)\}^2 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{b^4}{y_0^2} (t - 1)^2 \cdot 4a^2 \cdot \frac{y_0^2}{b^2} (1 - t^2) \\ &= a^2 b^2 (t - 1)^2 (1 - t^2) \quad \dots \boxed{\text{ケ}} \end{aligned}$$

となる。