

数 学 問 題

注 意

1. この問題冊子は 14 ページあります。解答用紙には、おもてと裏があります。
2. あなたの受験番号は解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と、受験票の番号が一致していることを確認しなさい。
3. 解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔Ⅰ〕の解答は、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
5. 問題〔Ⅱ〕、〔Ⅲ〕の解答は、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
6. 問題〔Ⅳ〕の解答は、解答用紙の所定の欄に記述しなさい。
7. 1 問につき 2 つ以上マークしないこと。2 つ以上マークした場合には、その解答は無効になります。
8. 解答は、必ず鉛筆又はシャープペンシル(いずれも HB・黒)で記入しなさい。
9. 訂正は、消しゴムできれいに消し、消しクズを紙面に残さないこと。
10. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
11. 解答用紙は必ず提出しなさい。
12. 試験時間は 90 分です。

※ この問題冊子は必ず持ち帰りなさい。

(マーク記入例)

良い例	悪い例
	

〔Ⅰ〕 以下の空欄 ア から シ にあてはまるものを解答群の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークせよ。なお、一つの解答群から同じものを二回以上選んでもよい。

(1) 正の値をとる関数 $f(x)$ が、

$$f'(x) = \log(f(x)), \quad f(0) = \sqrt{e}$$

を満たすとき、

$$f'(0) = \text{ア}, \quad f''(0) = \text{イ}, \quad f'''(0) = \text{ウ}$$

である。ただし、 e は自然対数の底とする。

ア の解答群

- | | | | |
|--------------|------------------------|-----------------|---------------|
| ① 0 | ① -2 | ② 2 | ③ -1 |
| ④ 1 | ⑤ $-\frac{1}{2}$ | ⑥ $\frac{1}{2}$ | ⑦ $-\sqrt{e}$ |
| ⑧ $\sqrt{e}$ | ⑨ $\frac{\sqrt{e}}{2}$ | | |

イ の解答群

- | | | | |
|--------------------------|-------------------------|-------------------------|------------------------|
| ① 0 | ① 1 | ② $-\frac{1}{2e}$ | ③ $\frac{1}{2e}$ |
| ④ $-\frac{1}{2\sqrt{e}}$ | ⑤ $\frac{1}{2\sqrt{e}}$ | ⑥ $-\frac{1}{\sqrt{e}}$ | ⑦ $\frac{1}{\sqrt{e}}$ |
| ⑧ $-\frac{2}{\sqrt{e}}$ | ⑨ $\frac{2}{\sqrt{e}}$ | | |

ウ の解答群

- | | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|--------------------------|-------------------------|
| ① 0 | ① $-\frac{1}{4}$ | ② $\frac{1}{4}$ | ③ $-\frac{1}{4e}$ |
| ④ $\frac{1}{4e}$ | ⑤ $\frac{1}{2e}$ | ⑥ $-\frac{1}{4\sqrt{e}}$ | ⑦ $\frac{1}{4\sqrt{e}}$ |
| ⑧ $\frac{1-\sqrt{e}}{4e\sqrt{e}}$ | ⑨ $\frac{2-\sqrt{e}}{4e\sqrt{e}}$ | | |

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

(2) 複素数 z が、等式 $z^2 = -15 - 8i$ を満たすなら、

$$z = \boxed{\text{工}} - \boxed{\text{オ}} i \text{ または } z = -\boxed{\text{工}} + \boxed{\text{オ}} i$$

である。ただし、 i は虚数単位とする。

$\boxed{\text{工}}$, $\boxed{\text{オ}}$ の解答群

① $\frac{1}{2}$

① 1

② $\frac{3}{2}$

③ 2

④ $\frac{5}{2}$

⑤ 3

⑥ $\frac{7}{2}$

⑦ 4

⑧ $\frac{9}{2}$

⑨ 5

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とし, a, b, c, d は

それぞれ 1 または -1 とする。 $AB = O$, $BA \neq O$ ならば,

$$BA = \boxed{\text{カ}} B, B^2 = \begin{pmatrix} \boxed{\text{キ}} & \boxed{\text{ク}} \\ \boxed{\text{ケ}} & \boxed{\text{コ}} \end{pmatrix}$$

である。

$\boxed{\text{カ}} \sim \boxed{\text{コ}}$ の解答群

- | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|-------|
| ① -4 | ② -3 | ③ -2 | ④ -1 | ⑤ 0 |
| ⑥ 1 | ⑦ 2 | ⑧ 3 | ⑨ 4 | ⑩ 5 |

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

(4) α は $0 \leq \alpha \leq \pi$ を満たす実数の定数とする。関数

$$f(x) = \cos x + \cos(x + \alpha) + \cos(x + 2\alpha)$$

が任意の x に対して一定の値 c をとるとき、 $c =$ サ であり、

$\alpha =$ シ である。

サ の解答群

- | | | | | |
|-----------------|-------------------------|-------------------------|------------------|-------|
| ① -1 | ② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | ③ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | ④ $-\frac{1}{2}$ | ⑤ 0 |
| ⑥ $\frac{1}{2}$ | ⑦ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | ⑧ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | ⑨ 1 | ⑩ 2 |

シ の解答群

- | | | | | |
|-------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-------------------|
| ① 0 | ② $\frac{\pi}{12}$ | ③ $\frac{\pi}{6}$ | ④ $\frac{\pi}{4}$ | ⑤ $\frac{\pi}{3}$ |
| ⑥ $\frac{\pi}{2}$ | ⑦ $\frac{2}{3}\pi$ | ⑧ $\frac{3}{4}\pi$ | ⑨ $\frac{5}{6}\pi$ | ⑩ π |

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

〔Ⅱ〕 以下の あ から え にあてはまるものを解答用紙の所定の欄に記入せよ。

点 $P\left(1, -\frac{11}{4}\right)$ を通る傾き m の直線を ℓ ，曲線 $y = x^2$ を C とし， ℓ と C は異なる 2 点 A ， B で交わるとする。

(1) m の値の範囲は あ である。

(2) 線分 AB の長さを m の式で表すと $\sqrt{(m^2 + 1)(\text{ い })}$ である。

(3) m を整数とすると，線分 AB の長さの最小値は う であり，このとき線分 AB と曲線 C とで囲まれた図形の面積は え である。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

〔Ⅲ〕 以下の お から く にあてはまる数を解答用紙の所定の欄に記入せよ。なお根号を含む数は分母を有理化すること。

O を原点とする座標平面上の点 $P_n(x_n, y_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は次のように帰納的に定義されているとする。

$$x_1 = 1, y_1 = \sqrt{5},$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{6}(4x_n - \sqrt{2}y_n), y_{n+1} = \frac{1}{6}(\sqrt{2}x_n + 4y_n)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots).$$

また、線分 OP_n の長さを p_n 、 $\angle P_nOP_{n+1} = \theta_n$ 、線分 P_nP_{n+1} の長さを ℓ_n とする。

(1) すべての自然数 n について、

$$p_{n+1} = \text{お} p_n, \cos \theta_n = \text{か}, \ell_n = \text{き} p_n$$

が成り立つ。

(2) $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \ell_n = \text{く}$ である。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

〔Ⅳ〕 以下の問に答えよ。解答は途中経過も書くこと。

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = e^{-2x} \left(\frac{3}{4} + \int_0^x e^{2s} g(s) ds \right)$$

で定める。ただし、

$$s \leq 2 \text{ のとき } g(s) = s,$$

$$s > 2 \text{ のとき } g(s) = 2$$

とし、 e は自然対数の底とする。(なお、 $2 < e < 3$ である。)

(1) $\int_0^x s e^{2s} ds$ を計算せよ。

(2) $0 \leq x \leq 2$ における $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。なお、これらの値をとる x の値も求めること。

(3) $x > 2$ において、 $f(x)$ の値が 1 より大きくなることがあるか調べよ。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)