

数 学 問 題

はじめに、これを読みなさい。

1. この問題用紙は 7 ページある。ただし、ページ番号のない白紙はページ数に含まない。白紙は計算用紙として使用してよい。
2. 解答用紙に印刷されている受験番号が正しいかどうか、受験票と照合して確認すること。
3. 監督者の指示にしたがい、解答用紙の氏名欄に氏名を記入すること。
4. 解答は、すべて解答用紙の所定欄にマークするか、または記入すること。所定欄以外のところには何も記入しないこと。
5. 問題に指定された数より多くマークしないこと。
6. 解答は、鉛筆またはシャープペンシル(いずれも HB・黒)で記入のこと。
7. 訂正する場合は、消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
8. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。
9. 問題は〔Ⅰ〕～〔Ⅳ〕まで 4 問ある。〔Ⅰ〕は必ず解答すること。〔Ⅱ〕, 〔Ⅲ〕, 〔Ⅳ〕はいずれか 2 問を選択して解答すること。
10. 解答用紙はすべて回収する。持ち帰らず、必ず提出すること。ただし、この問題用紙は、必ず持ち帰ること。
11. 試験時間は 60 分である。
12. マーク記入例

良い例	悪い例
	

〔Ⅰ〕 (1)～(10)において、Ⓐ、Ⓑ、Ⓒの値の大小関係を調べ、最小のものと最大のものを、それぞれ解答用紙の所定欄にマークせよ。

(1) Ⓐ ${}_{1000}C_{300}$ Ⓑ ${}_{1000}C_{400}$ Ⓒ ${}_{1000}C_{800}$

(2) Ⓐ $\sum_{k=1}^{400} \sqrt{k}$ Ⓑ $\sum_{k=1}^{200} k$ Ⓒ $\sum_{k=1}^{100} 4k$

(3) $\triangle ABC$ において、 $AB=1$ ， $BC=2$ ， $\angle B=60^\circ$ のとき，
Ⓐ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ Ⓑ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ Ⓒ $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

(4) $a > b > c > 0$ のとき，
Ⓐ $\frac{b-c}{a}$ Ⓑ $\frac{a-c}{b}$ Ⓒ $\frac{c-b}{c}$

(5) 2次方程式 $x^2 + 2x + 4 = 0$ の2つの解を α ， β としたとき，
Ⓐ $\alpha\beta$ Ⓑ $\alpha + \beta$ Ⓒ $\alpha^2 + \beta^2$

(6) 集合 A の要素の個数を $n(A)$ で表す。有限集合 U を全体集合とする2つの部分集合 A ， B について、 $n(U) = n(A \cup B)$ ， $n(U) > n(A) > n(B) > 0$ であるとき，
Ⓐ $n(\overline{A} \cap \overline{B})$ Ⓑ $n(A \cap \overline{B})$ Ⓒ $n(\overline{A} \cap B)$

(7) 底面の半径が r 、母線(側面をつくる線分)が R である円すいについて、

- (A) $r = 4$, $R = 10$ のときの表面積
- (B) $r = 3$, $R = 20$ のときの表面積
- (C) $r = 2$, $R = 30$ のときの表面積

(8) 2 個のサイコロを同時に投げたとき、

- (A) 出た目の和が偶数である確率
- (B) 出た目の和が 8 以上である確率
- (C) 出た目の和が 7 以下である確率

(9) 3 つの異なる実数 a , b , c の和が 4 であり、

$$\frac{1+i}{1-i}a + (2+3i)b + c = 0$$

が成り立つとき、

- (A) a
- (B) b
- (C) c

(10) a , b , c , m は 0 でない実数とする。2 つの放物線 $y = ax^2 + bx + c$ と $y = cx^2 + ax + b$ がともに点 $(1, m)$ を通り、この点における 2 つの放物線に対する 2 本の接線の傾きが、ともに m より大きいとき、

- (A) a
- (B) b
- (C) c

〔Ⅱ〕, 〔Ⅲ〕, 〔Ⅳ〕のうち2問を選択して解答せよ。(なお3問すべてに解答した場合は, 高得点の2問を合計得点に含める。)

〔Ⅱ〕 所定の解答欄(表面)に, (1), (2)については答のみを, (3)については答と解答経過をともに記せ。

正の整数 n に対して, 次の不等式が成り立つことを証明したい。

$$\log_2 n + \log_2(n+2) \leq n \log_2 3$$

- (1) 等号が成立するときの n を求めよ。
- (2) 対数を含まない不等式に変形せよ。
- (3) (2)で求めた不等式を, 数学的帰納法を用いて証明せよ。

〔Ⅲ〕 所定の解答欄(裏面)に, (1), (2)については答のみを, (3)については答と解答経過をともに記せ。

2つの放物線 $y = x^2 - 2ax + 2a^2 + 1$ と $y = -x^2 + 2ax - 2a^2 + 4a + 1$ が異なる2点で交わり, a は実数であるとき,

- (1) a の値の範囲を求めよ。
- (2) 2つの交点の x 座標の値を a を用いて表わせ。
- (3) $\int_a^\beta (x-a)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-a)^3$ であることを利用して, 2つの放物線で囲まれる部分の面積の最大値と, そのときの a の値を求めよ。

〔Ⅱ〕, 〔Ⅲ〕, 〔Ⅳ〕のうち 2 問を選択して解答せよ。(なお 3 問すべてに解答した場合は, 高得点の 2 問を合計得点に含める。)

〔Ⅳ〕 所定の解答欄(裏面)に, (1), (2)については答のみを, (3)については答と解答経過をともに記せ。

xy 平面状に, 原点 O を中心とする単位円がある。動点 P は点 $(1, 0)$ から速さ π で, 動点 Q は点 $(-1, 0)$ から速さ 2π で, それぞれ単位円周上を反時計回りに, 時刻 $t = 0$ より同時に動きはじめたとする。

- (1) 時刻 t における P の座標を, t を用いて表わせ。
- (2) 内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ が最大となるような時刻 t と, その最大値を求めよ。
- (3) 時刻 t における内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ を, t を用いて表わせ。またそのグラフの概形を描け。

(以上問題終)