

数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B 問題

はじめに、これを読みなさい。

1. 解答用紙には、あなたの受験番号が印刷されています。受験番号が正しいかどうか、受験票と照合して確認し、氏名を記入しなさい。
2. この問題は全部で6ページあります(表紙の次の白紙2ページはメモ用紙として使用してかまいません)。
3. 解答は、すべて解答用紙の解答欄にマークしなさい。
4. 1つの解答欄に2つ以上マークしてはいけません。
5. 解答は、必ず鉛筆またはシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入しなさい。
6. 訂正する場合は、消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
7. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。
8. 解答用紙は持ち帰らないで、必ず提出しなさい。
9. この問題用紙は必ず持ち帰りなさい。
10. この試験時間は60分です。
11. 分数形で解答する場合は、既約分数で答えなさい。
12. 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。
13. マークの記入例

良い例	悪い例
	

〔Ⅰ〕 空欄に当てはまる 0 から 9 までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

- (1) 座標平面上の 2 つの放物線 $C_1: y = x^2 + ax + b$ と $C_2: y = -x^2 + bx + a$ がただ 1 つの共有点を持ち、なおかつ 2 つの 2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + bx + a = 0$ が共通の解 $x = a$ を持つとき、

$$a = -\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad b = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}, \quad a = \boxed{\text{オ}}$$

である。ただし、 $a \neq b$ とする。

- (2) 連立方程式

$$\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 1 \\ 5^{x+2} \cdot 2^y = 4 \end{cases}$$

を解くと、

$$x = -\log_{10} \boxed{\text{カキ}}, \quad y = \log_{10} \boxed{\text{ク}}$$

である。

- (3) 直線 $\ell_1: y = -3x + \sqrt{10}$, $\ell_2: y = -x + \sqrt{2}$ はそれぞれ点 P, Q において円 $C: x^2 + y^2 = 1$ に接している。原点を O とし、 $\angle POQ = \theta$ とするとき、

$$\cos \theta = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}$$

である。

(このページは計算用紙として使用しないでください。)

〔Ⅱ〕 カタカナが記入されている空欄に当てはまる 0 から 9 までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。また、ひらがなが記入されている空欄に解答群の中から当てはまるものを選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。

座標平面上の放物線 $C: y = x^2$ の上の点 $P(s, s^2)$, $Q(t, t^2)$ ($s < t$) における接線をそれぞれ l_1 , l_2 とし、 l_1 と l_2 の交点を R とする。 l_1 と l_2 および C によって囲まれる部分の面積を S とおく。このとき、 R の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{あ}}}{\boxed{\text{イ}}}, \boxed{\text{う}} \right) \text{ であり,}$$

$$S = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}} \boxed{\text{き}}^{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

P と Q が $\angle PRQ = 45^\circ$ を満たすように動くときの、 S の最小値を求めたい。 l_2 と x 軸の正方向とのなす角を θ とすると、 $\tan \theta = \boxed{\text{け}}$ である。 l_1 と x 軸の正方向とのなす角は $\theta + 45^\circ$ であるから、

$$s = -\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \cdot \frac{\boxed{\text{し}}}{\boxed{\text{す}}} \quad (*)$$

が成り立つ。また、 $t > s$ より

$$t > \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

が成り立つ。

さらに、(*) を使って $\boxed{\text{き}}$ を t の式で表すと、

$$\begin{aligned} \boxed{\text{き}} &= 1 + \frac{\boxed{\text{す}}}{\boxed{\text{タ}}} + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{す}}} \\ &\geq 1 + \sqrt{\boxed{\text{ツ}}} \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、等号が成立するのは $t = \frac{\boxed{\text{テ}} + \sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ のときである。

したがって、 S は $t = \frac{\boxed{\text{テ}} + \sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ のときに、最小値

$$\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}} \left(1 + \sqrt{\boxed{\text{ツ}}} \right)^{\boxed{\text{ク}}}$$

をとる。

あ、う、き の解答群

- | | | | |
|--------------------|--------------------|---------------|---------------|
| ① $t + s$ | ① ts | ② $t^2 + s^2$ | ③ $ts(t + s)$ |
| ④ $t - s$ | ⑤ $t^2 - s^2$ | ⑥ $t^3 - s^3$ | ⑦ $ts(t - s)$ |
| ⑧ $t^2 + ts + s^2$ | ⑨ $t^2 - ts + s^2$ | | |

け、し、す の解答群

- | | | | |
|-------------------|-------------------|------------|------------|
| ① t | ① $2t$ | ② $1 + t$ | ③ $1 - t$ |
| ④ $t - 1$ | ⑤ $1 + 2t$ | ⑥ $1 - 2t$ | ⑦ $2t - 1$ |
| ⑧ $1 + \sqrt{3}t$ | ⑨ $1 - \sqrt{3}t$ | | |

- 〔Ⅲ〕 カタカナが記入されている空欄に当てはまる 0 から 9 までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。また、ひらがなが記入されている空欄に解答群の中から当てはまるものを選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。なお、一つの解答群から同じものを二回以上選んでもよい。

何人かで同時に硬貨を投げるゲームを行う。表が出た者だけが残る、さらにこのゲームを何度か続けて最後に残った 1 人を勝者とする。ただし、全員が表の場合と全員が裏の場合(このことをあいこと言う)は全員が残るものとする。なお、表が出る確率と裏が出る確率はともに $\frac{1}{2}$ である。

- (1) 3 人が硬貨を投げるとき、1 人が表の確率は あ , 2 人が表の確率は い , あいこの確率は $1 - \text{あ} - \text{い}$ である。2 人が硬貨を投げるとき、1 人が表の確率は う , あいこの確率は $1 - \text{う}$ である。

- (2) 3 人でこのゲームを行い、3 回目に勝者が決まる確率 p_3 を求めよう。3 人

のあいこが 2 回続き、3 回目に勝者が決まる確率は $\frac{\text{エ}}{\text{お}}$ である。1 回

目が 3 人のあいこで、2 回目に 2 人が残り、3 回目に勝者が決まる確率は

$\frac{\text{カ}}{\text{き}}$ である。1 回目に 2 人が残り、2 回目が 2 人のあいこで、3 回目

に勝者が決まる確率は $\frac{\text{ク}}{\text{け}}$ である。したがって、 $p_3 = \frac{\text{コサ}}{\text{し}}$ で

ある。

(3) つぎに、3人でこのゲームを行い、 n 回目に勝者が決まる確率 p_n を求めたい。1回で勝者が決まる確率 p_1 は あ である。 $n \geq 2$ のとき、3人の

あいこが $n-1$ 回続き n 回目に勝者が決まる確率は $\frac{\text{ス}}{\text{セ}} \cdot \text{そ}^n$

である。また、3人のあいこが $k-1$ 回続き k 回目に2人が残り n 回目に勝

者が決まる確率は $\frac{\text{タ}}{\text{チ}} \cdot \text{つ}^k \cdot \text{て}^n$ である ($k=1, 2, \dots, n-1$)。したがって、

$$p_n = \frac{\text{タ}}{\text{チ}} \cdot (\text{と}^n - \text{な}^n)$$

である。この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

あ、い、う、そ、つ、て、と、な の解答群

① $\frac{1}{2}$

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{3}{4}$

③ $\frac{1}{8}$

④ $\frac{3}{8}$

⑤ $\frac{5}{8}$

⑥ $\frac{7}{8}$

⑦ 1

お、き、け、し の解答群

① 1

① 2

② 4

③ 8

④ 16

⑤ 32

⑥ 64

⑦ 128

⑧ 256

⑨ 512