

【I】

(1)

☐ア ☐B ☐イ ☐B ☐ウ ☐B ☐エ ☐B

(2)

☐ア ☐E ☐イ ☐E ☐ウ ☐D

(3)

☐ア ☐D ☐イ ☐E

(4)

☐ア ☐B ☐イ ☐D

(5)

☐ア ☐B ☐イ ☐C

(6)

☐ア ☐B ☐イ ☐I ☐ウ ☐B ☐エ ☐I

【解説】

(1)

a, b を実数として

$$z=a+bi$$

とおくと、

$$z^2=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$$

となる。したがって $z^2=-2i$ のとき、実部と虚部を比較して、

$$\begin{cases} a^2-b^2=0 \\ 2ab=-2 \end{cases} \Leftrightarrow a=\pm 1, b=\mp 1 \text{ (複号同順)}$$

となるので、

$$z=\pm 1\mp i \text{ (複号同順)}$$

と表せる。

(2)

2つの解の比が1:3であるから、これらは $\alpha, 3\alpha$ と表すことができる。このとき、解と係数の関係より

$$\begin{cases} 4\alpha=p \\ 3\alpha^2=p-1 \end{cases}$$

となる。これらを連立して、 α を消去すると、

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{p}{4}\right)^2 &= p-1 \\ \Leftrightarrow 3p^2-16p+16 &= 0 \\ \Leftrightarrow (p-4)(3p-4) &= 0 \\ \therefore p &= 4, \frac{4}{3} \end{aligned}$$

を得る。

(3)

真数条件は

$$\begin{cases} 5-x>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow 3<x<5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。また、 $0.5<1$ であるから、 $\textcircled{1}$ のもとで

$$\begin{aligned} \log_{0.5}(5-x) &< 2\log_{0.5}(x-3) \\ \Leftrightarrow \log_{0.5}(5-x) &< \log_{0.5}(x-3)^2 \\ \Leftrightarrow 5-x &> (x-3)^2 \\ \Leftrightarrow x^2-5x+4 &< 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x-4) &< 0 \\ \Leftrightarrow 1 &< x < 4 \end{aligned}$$

となる。 $\textcircled{1}$ と合わせて

$$3<x<4$$

を得る。

(4)

点Aの x 座標は

$$\begin{aligned} ax^2 &= bx \\ \Leftrightarrow x &= 0, \frac{b}{a} \text{ } (\because a>0) \end{aligned}$$

より、 $\frac{b}{a}$ である。したがって、 $A\left(\frac{b}{a}, \frac{b^2}{a}\right)$ であり、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\frac{b}{a}} (bx-ax^2) dx \\ &= -a \int_0^{\frac{b}{a}} x \left(x-\frac{b}{a}\right) dx \\ &= \frac{a}{6} \left(\frac{b}{a}\right)^3 \\ &= \frac{b^3}{6a^2} \end{aligned}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{b^2}{a} = \frac{b^3}{2a^2}$$

であるから、

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{b^3}{6a^2}}{\frac{b^3}{2a^2}} = \frac{1}{3}$$

となる。

(5)

事象Xの生起確率を $P(X)$ と書くことにする。このとき、条件より、

$$\begin{aligned} P(A\cup B)-P(A\cap B) &= \frac{2}{5} \\ \Leftrightarrow P(A\cup B) &= P(A\cap B)+\frac{2}{5} \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= P(A)+P(B)-P(A\cup B) \\ \Leftrightarrow P(A\cap B) &= \frac{4}{5}+\frac{3}{5}-\left\{P(A\cap B)+\frac{2}{5}\right\} \\ \Leftrightarrow P(A\cap B) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(6)

まず、点Dが辺ABの中点であることから

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と表せる。次に $BO:OE=s:(1-s)$ とすると、

$$\overrightarrow{CO} = s\cdot\overrightarrow{CE} + (1-s)\overrightarrow{CB} = \frac{3s}{5}\overrightarrow{CA} + (1-s)\overrightarrow{CB} \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

と表せる。点Oは直線CD上の点であるから、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ の係数について、 $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ が1次独立なので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}:\frac{1}{2} &= \frac{3s}{5}:(1-s) \\ \Leftrightarrow s &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって

$$\overrightarrow{CO} = \frac{3s}{5}\overrightarrow{CA} + (1-s)\overrightarrow{CB} = \frac{3}{8}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{CB}$$

であり、

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CO} = \frac{1}{8}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{8}\overrightarrow{CB}$$

となる。

〔Ⅱ〕

(1)

$$y=(a+b)x-ab$$

(2)

$$(a+b)p-ab-p^2$$

(3)

$$\frac{1}{8}(b-a)^3$$

(4)

△BB'Aの面積は

$$\triangle BB'A=\frac{1}{2}\cdot 2b\cdot (b^2-a^2)=b^3-a^2b$$

と表される。したがって、 a, b を固定したときの四角形BB'APの面積の最大値を S とすると、(3)の結果とあわせ、

$$S=\triangle BB'A+\triangle ABP=b^3-a^2b+\frac{1}{8}(b-a)^3$$

が得られる。ここで、

$$\begin{aligned}\frac{dS}{da} &= -2ab + \frac{1}{8} \cdot 3 \cdot (b-a)^2 \cdot (-1) \\ &= -\frac{3}{8} \left(a + \frac{1}{3}b \right) (a+3b)\end{aligned}$$

となるので、 S を a の関数とみたときの S の増減表は次のようになる。

a	$-b$	$\cdots$	$-\frac{1}{3}b$	$\cdots$	0
$\frac{dS}{da}$		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

したがって、 $a=-\frac{1}{3}b$ のとき S は最大となり、その値は

$$b^3-\left(-\frac{1}{3}b\right)^2b+\frac{1}{8}\left\{b-\left(-\frac{1}{3}b\right)\right\}^3=\frac{32}{27}b^3$$

となる。以上より、点A、Pが C 上で点B、B'の間を動くとき、四角形BB'APの面積の最大値は

$$\frac{32}{27}b^3$$

となる。また、そのときの a, p は

$$\begin{aligned}a &= -\frac{1}{3}b \\ p &= \frac{a+b}{2} = \frac{1}{3}b\end{aligned}$$

となるので、点A、Pの座標は

$$A\left(-\frac{1}{3}b, \frac{1}{9}b^2\right), P\left(\frac{1}{3}b, \frac{1}{9}b^2\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A\left(-\frac{1}{3}b, \frac{1}{9}b^2\right), P\left(\frac{1}{3}b, \frac{1}{9}b^2\right) \text{のとき、面積} \frac{32}{27}b^3$$

〔解説〕

(1)

直線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned}y-a^2 &= \frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a) \\ \Leftrightarrow y &= (a+b)x-ab\end{aligned}$$

となる。

(2)

点Qの y 座標は

$$(a+b)p-ab$$

であるから、線分PQの長さは、 $a < x < b$ において、直線 ℓ が放物線より上側にあることから、

$$(a+b)p-ab-p^2$$

となる。

(3)

$$\triangle ABP=\triangle APQ+\triangle BPQ$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \cdot (p-a) \cdot PQ + \frac{1}{2} \cdot (b-p) \cdot PQ \\ &= \frac{1}{2} \cdot (b-a) \cdot PQ\end{aligned}$$

であるから、A、Bを固定した状態で、△ABPの面積を最大にするには、線分PQの長さを最大にすれば良い。ここで、

$$\frac{d}{dp}PQ=a+b-2p$$

であるから、 $p=\frac{a+b}{2}$ のときに線分PQの長さは最大となり、その値は

$$(a+b) \cdot \frac{a+b}{2} - ab - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(b-a)^2$$

となる。よって、△ABPの面積の最大値は

$$\frac{1}{2} \cdot (b-a) \cdot \frac{1}{4}(b-a)^2 = \frac{1}{8}(b-a)^3$$

となる。