

問 I

- (1)

アイ

 14 (2)

ウエオカ

 5080 (3)

キク

 36

【解説】

(1)

$1728 = 2^6 \times 3^3$ の約数の総数は

$$(6+1)(3+1) = 28 \text{ [個]}$$

である。よって、 $AB < BC$ で面積が 1728 の長方形 ABCD は

$$\frac{28}{2} = 14 \text{ [通り]}$$

存在する。

(2)

$AB + BC$ の総和は約数の総和に等しく、その値は

$$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6)(1+3+3^2+3^3) = \frac{2^7-1}{2-1} \times \frac{3^4-1}{3-1} = 5080$$

である。

(3)

約数のうち、小さい方から 14 番目のものを求める。約数を小さい方から並べると

$$1 < 2 < 3 < 4 < 6 < 8 < 9 < 12 < 16 < 18 < 24 < 27 < 32 < 36 < \dots$$

となり、14 番目に小さいのは 36 であることがわかる。

問Ⅱ

$$(1) \quad \boxed{\text{ケ}} \cdot 4 \cdot \boxed{\text{コサ}} \cdot 12 \cdot \boxed{\text{シス}} \cdot 15 \cdot \boxed{\text{セ}} \cdot 3$$

$$(2) \quad \boxed{\text{ソ}} \cdot 7 \cdot \boxed{\text{タ}} \cdot 2$$

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned} y &= \sin 3\theta + 6 \cos 2\theta - 6 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 3 \cos \theta + 12 \sin \theta \\ &= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta + 6(1 - 2 \sin^2 \theta) - 6 \cdot \frac{1 - \cos \theta}{2} - 3 \cos \theta + 12 \sin \theta \\ &= -4 \sin^3 \theta - 12 \sin^2 \theta + 15 \sin \theta + 3 \end{aligned}$$

であるから、 $\sin \theta = x$ とおくと

$$y = -4x^3 - 12x^2 + 15x + 3$$

となる。

(2)

$$y' = -12x^2 - 24x + 15 = -3(2x+5)(2x-1)$$

である。また、 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ より $0 \leq x \leq 1$ であるから、増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
y'		+	0	-	
y	3	$\nearrow$	7	$\searrow$	2

よって $x = \frac{1}{2}$ のとき最大値 7 をとり、 $x = 1$ のとき最小値 2 をとることがわかる。

問Ⅲ

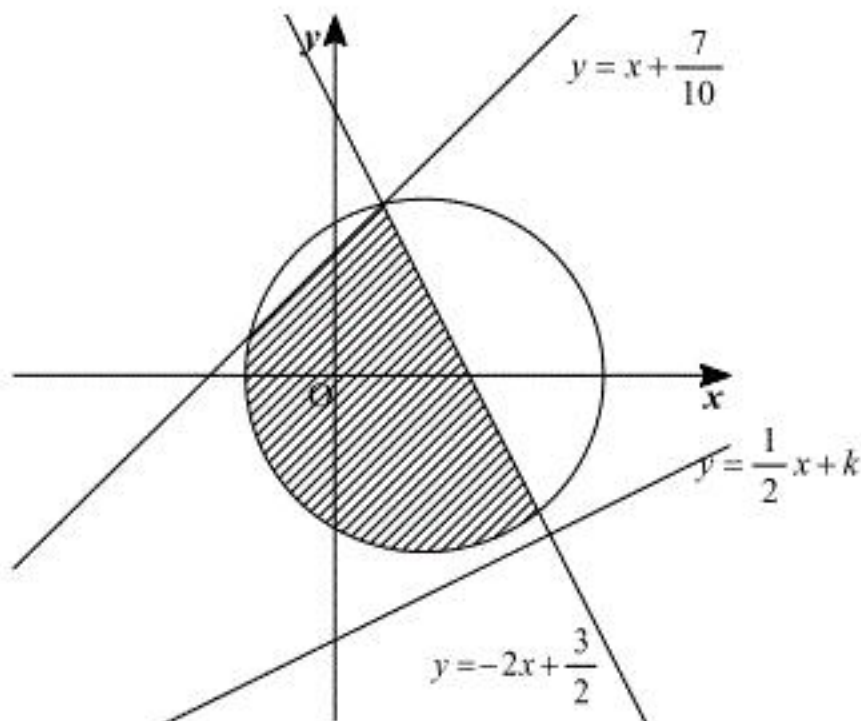
$$(1) \begin{array}{|c|} \hline \text{チ} \\ \hline \end{array} 1 \begin{array}{|c|} \hline \text{ツ} \\ \hline \end{array} 4 \begin{array}{|c|} \hline \text{テ} \\ \hline \end{array} 5 \begin{array}{|c|} \hline \text{ト} \\ \hline \end{array} 2 \begin{array}{|c|} \hline \text{ナ} \\ \hline \end{array} 5 \begin{array}{|c|} \hline \text{ニ} \\ \hline \end{array} 6$$

$$(2) \begin{array}{|c|} \hline \text{ヌ} \\ \hline \end{array} 1 \begin{array}{|c|} \hline \text{ネ} \\ \hline \end{array} 4 \begin{array}{|c|} \hline \text{ノ} \\ \hline \end{array} 1 \begin{array}{|c|} \hline \text{ハ} \\ \hline \end{array} 5 \begin{array}{|c|} \hline \text{ヒフ} \\ \hline \end{array} 10$$

【解説】

(1)

領域 D は下図の斜線部である。



k が最小のとき円 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$ と直線 ℓ が接するから、 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ と $\ell: x - 2y + 2k = 0$ の距離が 1 となる。よって

$$\frac{\left|\frac{1}{2} + 2k\right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = 1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

となり、この場合適するのは $k = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ である。一方 k が最大のとき、直線 ℓ は 2 直線

$y = -2x + \frac{3}{2}$, $y = x + \frac{7}{10}$ の交点 $\left(\frac{4}{15}, \frac{29}{30}\right)$ を通るので

$$\frac{29}{30} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{15} + k \Leftrightarrow k = \frac{5}{6}$$

となる。以上のことから、 k のとる範囲は $-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2} \leq k \leq \frac{5}{6}$ となる。

(2)

L が最大のとき、 ℓ が円の中心 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を通るので

$$0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + k \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$$

である。直線 $y = -2x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4x + 2y - 3 = 0$ と $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ の距離は

$$\frac{|2 - 3|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

なので、 L が最大のとき $L = 1 + \frac{\sqrt{5}}{10}$ となる。

問Ⅳ

$$(1) \quad \boxed{\text{ヘ}} \quad 2 \quad \boxed{\text{ホ}} \quad 3 \quad \boxed{\text{マ}} \quad 1 \quad \boxed{\text{ミ}} \quad 3 \quad \boxed{\text{ム}} \quad 2 \quad \boxed{\text{メ}} \quad 7 \quad \boxed{\text{モ}} \quad 3$$

$$(2) \quad \boxed{\text{ヤユ}} \quad 10 \quad \boxed{\text{ヨ}} \quad 7 \quad \boxed{\text{ラリ}} \quad 49$$

$$(3) \quad \boxed{\text{ルレロ}} \quad 777 \quad \boxed{\text{ワヲ}} \quad 18$$

(4) $\overline{AB}$ の中点を E 、 AP の中点を F とし、 $\overline{AO} = s\overline{a} + t\overline{b}$ とおくと

$$\overline{OE} = \overline{OA} + \overline{AE} = -\overline{AO} + \frac{1}{2}\overline{AB} = -(s\overline{a} + t\overline{b}) + \frac{1}{2}\overline{a} = \left(\frac{1}{2} - s\right)\overline{a} - t\overline{b}$$

である。 $\overline{AB} \perp \overline{OE}$ より $\overline{AB} \cdot \overline{OE} = 0$ なので

$$\overline{a} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} - s \right) \overline{a} - t \overline{b} \right\} = \left(\frac{1}{2} - s \right) \|\overline{a}\|^2 - t \overline{a} \cdot \overline{b} = 9 \left(\frac{1}{2} - s \right) + 6t = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \overline{OF} &= \overline{OA} + \overline{AF} = -\overline{AO} + \frac{1}{2}\overline{AP} \\ &= -(s\overline{a} + t\overline{b}) + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b} \right) = \left(\frac{1}{3} - s \right) \overline{a} + \left(\frac{1}{6} - t \right) \overline{b} \end{aligned}$$

である。 $\overline{AP} \perp \overline{OF}$ より $\overline{AP} \cdot \overline{OF} = 0$ なので

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2}{3}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b} \right) \cdot \left\{ \left(\frac{1}{3} - s \right) \overline{a} + \left(\frac{1}{6} - t \right) \overline{b} \right\} \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} - s \right) \|\overline{a}\|^2 + \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{3}s - \frac{2}{3}t \right) \overline{a} \cdot \overline{b} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} - t \right) \|\overline{b}\|^2 \\ &= 6 \left(\frac{1}{3} - s \right) - 6 \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{3}s - \frac{2}{3}t \right) + \frac{16}{3} \left(\frac{1}{6} - t \right) \\ &= \frac{14}{9} - 4s - \frac{4}{3}t = 0 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ を解くと $s = \frac{23}{54}$ 、 $t = -\frac{1}{9}$ となるので

$$\overline{AO} = \frac{23}{54}\overline{a} - \frac{1}{9}\overline{b}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overline{AO} = \frac{23}{54}\overline{a} - \frac{1}{9}\overline{b}$$

【解説】

(1) $\triangle APD$ と $\triangle NPB$ は相似であり、 $AD:BN = 2:1$ より、 $AP:PN = 2:1$ となる。ここで

$$\overline{AN} = \overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} \text{ より、}$$

$$\overline{AP} = \frac{2}{3}\overline{AN} = \frac{2}{3}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b}$$

となる。また

$$|\overline{a}| = 3, |\overline{b}| = 4, \overline{a} \cdot \overline{b} = 3 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = -6$$

であり

$$|\overline{AP}|^2 = \left(\frac{2}{3}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b} \right)^2 = \frac{4}{9}|\overline{a}|^2 + \frac{4}{9}\overline{a} \cdot \overline{b} + \frac{1}{9}|\overline{b}|^2 = \frac{28}{9}$$

となることから、 AP の長さは $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ である。

(2) (1)と同様に考えると

$$\overline{MQ} = \frac{1}{3}\overline{MC} = \frac{1}{3}\overline{AN} = \frac{1}{3}\overline{a} + \frac{1}{6}\overline{b}$$

となるので、

$$\overline{AQ} = \frac{1}{3}\overline{a} + \frac{2}{3}\overline{b}$$

である。よって

$$\begin{aligned} \overline{AP} \cdot \overline{AQ} &= \left(\frac{2}{3}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b} \right) \cdot \left(\frac{1}{3}\overline{a} + \frac{2}{3}\overline{b} \right) \\ &= \frac{2}{9}|\overline{a}|^2 + \frac{5}{9}\overline{a} \cdot \overline{b} + \frac{2}{9}|\overline{b}|^2 \\ &= \frac{20}{9} \end{aligned}$$

となる。また

$$|\overline{AQ}|^2 = \left(\frac{1}{3}\overline{a} + \frac{2}{3}\overline{b} \right)^2 = \frac{1}{9}|\overline{a}|^2 + \frac{4}{9}\overline{a} \cdot \overline{b} + \frac{4}{9}|\overline{b}|^2 = \frac{49}{9}$$

より、 AQ の長さは $\frac{7}{3}$ である。ゆえに

$$\cos \angle PAQ = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AQ}}{|\overline{AP}| |\overline{AQ}|} = \frac{\frac{20}{9}}{\frac{2\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{7}{3}} = \frac{10\sqrt{7}}{49}$$

である。

$$\begin{aligned} \overline{AP} \cdot \overline{AB} &= \left(\frac{2}{3}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b} \right) \cdot \overline{a} \\ &= \frac{2}{3}|\overline{a}|^2 + \frac{1}{3}\overline{a} \cdot \overline{b} \\ &= 4 \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \cos \angle PAB &= \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AB}}{|\overline{AP}| |\overline{AB}|} = \frac{4}{\frac{2\sqrt{7}}{3} \cdot 3} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \\ \sin \angle PAB &= \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{7}}{7} \right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{7} \end{aligned}$$

である。また、 $\overline{BP} = -\frac{1}{3}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b}$ であるので

$$|\overline{BP}|^2 = \left(-\frac{1}{3}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b} \right)^2 = \frac{1}{9}|\overline{a}|^2 - \frac{2}{9}\overline{a} \cdot \overline{b} + \frac{1}{9}|\overline{b}|^2 = \frac{37}{9}$$

と求まり、 BP の長さは $\frac{\sqrt{37}}{3}$ である。以上より正弦定理から、外接円の半径 R は

$$2R = \frac{|\overline{BP}|}{\sin \angle PAB} = \frac{\frac{\sqrt{37}}{3}}{\frac{\sqrt{21}}{7}} = \frac{\sqrt{777}}{9} \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{777}}{18}$$

とわかる。