

【I】

- (1) ア 8 イ 6 ウ 1 エ 1 オ 4 カ 1
 (2) キ 1 ク 3 ケ 2 コ 3 サ 2 シ 3
 ス 1 セ 3 ソ 4 タ 3 チ 8 ツ 3
 (3) テ ③
 (4) ト ③

【解説】

(1)

$$a_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1} k} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

より、 $a_{40} = \frac{1}{861}$ となる。また、

$$a_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)} = 2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

であるので

$$\begin{aligned} \sum_{n=40}^{80} a_n &= 2 \left\{ \left(\frac{1}{41} - \frac{1}{42} \right) + \left(\frac{1}{42} - \frac{1}{43} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{81} - \frac{1}{82} \right) \right\} \\ &= 2 \left(\frac{1}{41} - \frac{1}{82} \right) \\ &= \frac{1}{41} \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

点Cは線分ABを2:1に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}}{2+1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{b}$$

となる。また、Dは線分ABを5:2に外分する点であるので

$$\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{b} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。さらに、Eは線分OBを2:1に外分する点であるので

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{b} \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。①、②より

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b}$$

である。ここで、点Fは直線OCと直線DEの交点であることから

$$\overrightarrow{OF} = k\overrightarrow{OC} = \frac{k}{3}\overrightarrow{a} + \frac{2k}{3}\overrightarrow{b} \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OE} + l\overrightarrow{DE} = \frac{2l}{3}\overrightarrow{a} + \left(\frac{l}{3} + 2 \right) \overrightarrow{b} \quad \cdots \textcircled{4}$$

と2通りに表わすことができる。ただし、 k, l は実数である。 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ は一次独立であるから

$$\frac{k}{3} = \frac{2l}{3}, \frac{2k}{3} = \frac{l}{3} + 2$$

という2つの等式が成り立ち、これを解くと $k=4, l=2$ である。ゆえに

$$\overrightarrow{OF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{a} + \frac{8}{3}\overrightarrow{b}$$

と求まる。

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+6x^2} - 1}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2}{\sin^2 x (\sqrt{1+6x^2} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \cdot \frac{6}{\sqrt{1+6x^2} + 1} \right\} \\ &= 1^2 \cdot \frac{6}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

である。

(4)

$${}_n C_5 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

であり、 $n, (n-1), (n-2), (n-3), (n-4)$ のうちひとつだけが5の倍数である。よって ${}_n C_5$ が5の倍数となるためには、分子の中に 5^2 の倍数が含まれていなければならない。以上のことから、 ${}_n C_5$ が5の倍数となる n は

$$n=100, 101, 102, 103, 104, 125$$

の6個ある。

〔Ⅱ〕

(1) あ $b-1$ い $b+2$

(2) う $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(3) え $-\frac{3}{b^2+b-1}$

(4) お $-\frac{1}{2}$

〔解説〕

(1)

直線 AB の傾きは

$$\frac{b^2-1}{b-(-1)}=b-1$$

となる。また、直線 BC の傾きは

$$\frac{b^2-4}{b-2}=b+2$$

となる。

(2)

$\theta = \frac{\pi}{2}$ となるとき、直線 AB と直線 BC は直交するので

$$(b-1)(b+2)=-1 \Leftrightarrow b^2+b-1=0$$

が成り立つ。 $-1 < b < 2$ より、 $b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ となる。

(3)

直線 AB, BC と x 軸とがなす角をそれぞれ θ_1, θ_2 とすると、 $\theta = \pi - (\theta_2 - \theta_1)$ であるから

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan \{ \pi - (\theta_2 - \theta_1) \} \\ &= -\tan (\theta_2 - \theta_1) \\ &= -\frac{\tan \theta_2 - \tan \theta_1}{1 + \tan \theta_2 \tan \theta_1} \\ &= -\frac{(b+2) - (b-1)}{1 + (b+2)(b-1)} \\ &= -\frac{3}{b^2+b-1} \end{aligned}$$

である。

(4)

$b^2+b-1 = \left(b+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$ なので、 $-1 < b < 2$ のとき

$$-\frac{5}{4} \leq b^2+b-1 < 5$$

となる。よって、 $\tan \theta$ の値の範囲は $\tan \theta \geq \frac{12}{5}$ 、 $\tan \theta < -\frac{3}{5}$ である。ただし $b^2+b-1=0$ のと

きは $\theta = \frac{\pi}{2}$ であることに注意する。 $0 < \theta < \pi$ より、 θ の値が最小になるのは $\tan \theta = \frac{12}{5}$ のと

き、すなわち $b = -\frac{1}{2}$ のときである。

〔Ⅲ〕

- (1) か -6 き 9
 (2) $<$ $1, 4$
 (3) け $-4 < c < 0$
 (4) こ $-2 \leq d \leq 1$

〔解説〕

(1)

与えられた条件から

$$f(2) = 8 + 4a + 2b - 4 = -2 \Leftrightarrow 2a + b = -3$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{a}{4} + \frac{b}{2} - 4 = -\frac{7}{8} \Leftrightarrow a + 2b = 12$$

という 2 つの等式が成り立つ。この連立方程式より

$$a = -6, b = 9$$

である。

(2)

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-4) = 0$$

より、 $f(x) = 0$ の解は $x = 1, 4$ である。

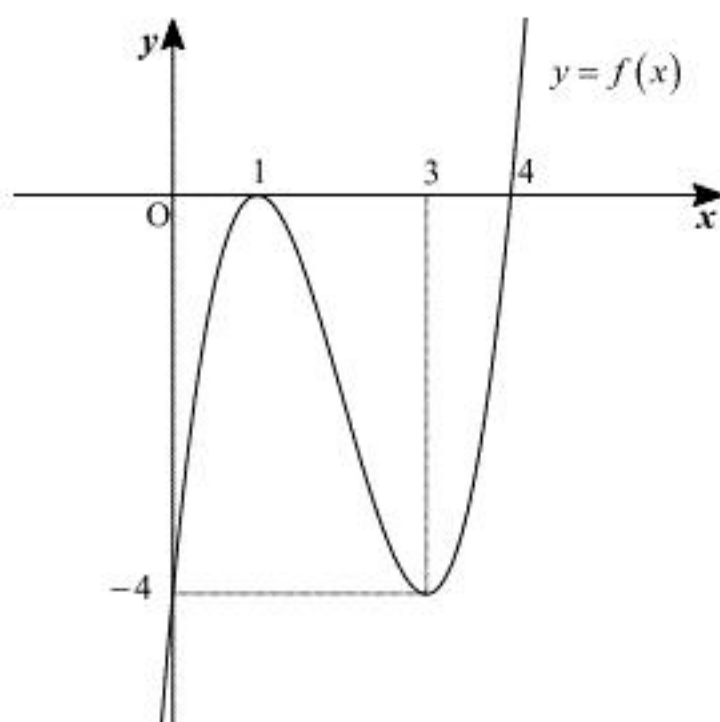
(3)

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

より、増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$

よって $y = f(x)$ のグラフは以下のようにかける。



グラフより、方程式 $f(x) = c$ が異なる 3 つの実数解を持つような実数 c の値の範囲は

$$-4 < c < 0$$

であることがわかる。

(4)

区間 $d \leq x \leq d+3$ における最大値が 0 であるための必要十分条件は、この区間に $x=1$ が含まれていることである。よって、求める範囲は

$$d \leq 1 \leq d+3$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq d \leq 1$$

である。

〔Ⅳ〕

(1)

$$\text{さ } \frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}$$

$$\text{し } -1$$

$$\text{す } -1$$

(2)

(a)

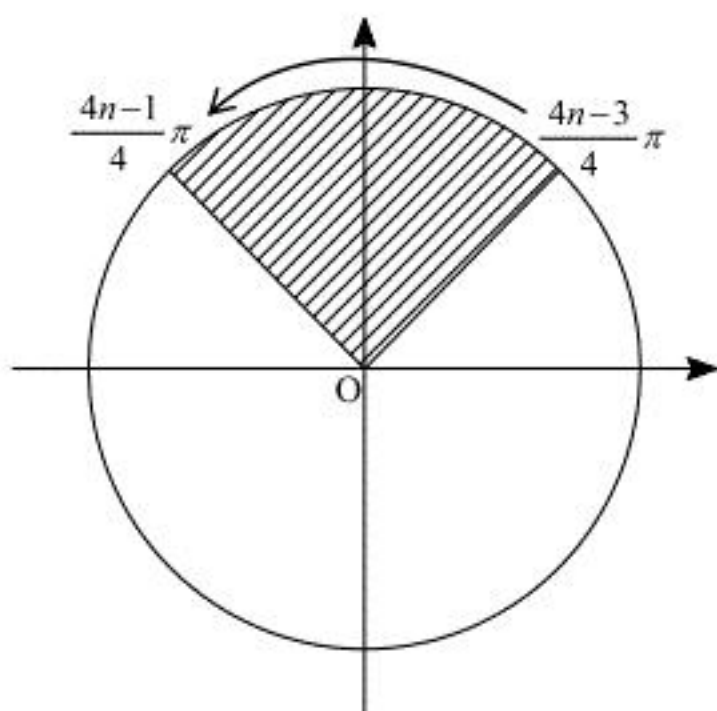
$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (2e^{-x} |\sin x| - \sqrt{2} e^{-x}) dx \quad \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\pi \text{ で } \sin x > 0 \text{ より} \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (2e^{-x} \sin x - \sqrt{2} e^{-x}) dx \\ &= \left[e^{-x} (-\sin x - \cos x) + \sqrt{2} e^{-x} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \\ &= \sqrt{2} e^{-\frac{3}{4}\pi} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad S_1 = \sqrt{2} e^{-\frac{3}{4}\pi}$$

(b)

$$S_n = \int_{\frac{4n-3}{4}\pi}^{\frac{4n-1}{4}\pi} (2e^{-x} |\sin x| - \sqrt{2} e^{-x}) dx$$

(i) n が奇数のとき、積分区間は単位円上で下図の範囲。



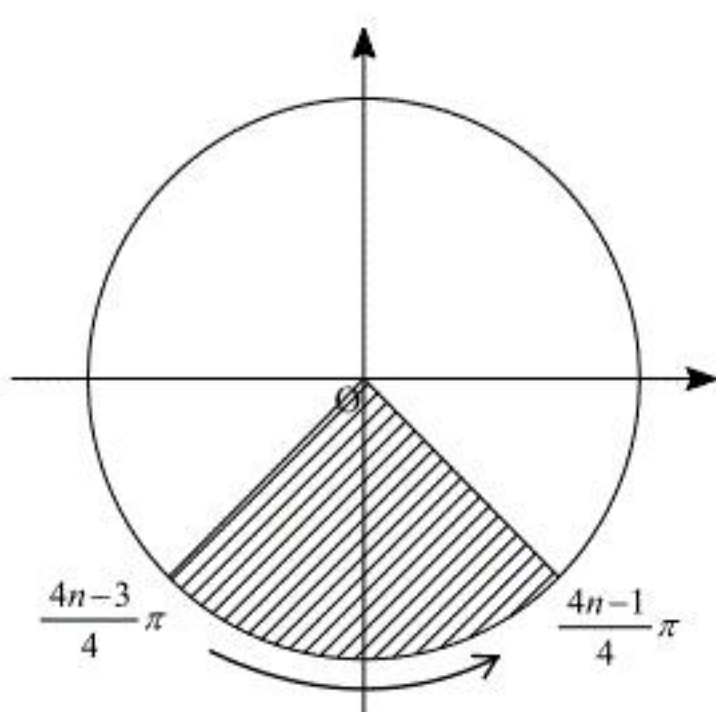
$$\therefore \sin x > 0$$

$$\begin{cases} \sin \frac{4n-1}{4}\pi = \sin \frac{4n-3}{4}\pi = \cos \frac{4n-3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \frac{4n-1}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

このとき、

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{\frac{4n-3}{4}\pi}^{\frac{4n-1}{4}\pi} (2e^{-x} \sin x - \sqrt{2} e^{-x}) dx \\ &= \left[e^{-x} (-\sin x - \cos x) + \sqrt{2} e^{-x} \right]_{\frac{4n-3}{4}\pi}^{\frac{4n-1}{4}\pi} \\ &= \sqrt{2} e^{-\frac{4n-1}{4}\pi} \end{aligned}$$

(ii) n が偶数のとき、積分区間は単位円上で下図の範囲。



$$\therefore \sin x < 0$$

$$\begin{cases} \sin \frac{4n-1}{4}\pi = \sin \frac{4n-3}{4}\pi = \cos \frac{4n-3}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \frac{4n-1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

このとき、

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{\frac{4n-3}{4}\pi}^{\frac{4n-1}{4}\pi} (-2e^{-x} \sin x - \sqrt{2} e^{-x}) dx \\ &= \left[e^{-x} (\sin x + \cos x) + \sqrt{2} e^{-x} \right]_{\frac{4n-3}{4}\pi}^{\frac{4n-1}{4}\pi} \\ &= \sqrt{2} e^{-\frac{4n-1}{4}\pi} \end{aligned}$$

$$(i) (ii) \text{ より, } S_n = \sqrt{2} e^{-\frac{4n-1}{4}\pi}$$

$$(\text{答}) \quad S_n = \sqrt{2} e^{-\frac{4n-1}{4}\pi}$$

(c)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} S_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} e^{-\frac{4n-1}{4}\pi} \\ &= \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\pi})^n \\ &= \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} \\ &= \frac{\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}}}{e^{\pi} - 1} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}}}{e^{\pi} - 1}$$

〔解説〕

(1)

(a)

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{-x} \left(|\sin x| - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0$$

より、 $|\sin x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となるような x を求めればよい。 $x \geq 0$ より、 k を自然数とすると

$$x_k = \frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}$$

である。

(b)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{ e^{-x} (a \sin x + b \cos x) \} &= -e^{-x} (a \sin x + b \cos x) + e^{-x} (a \cos x - b \sin x) \\ &= e^{-x} \{ (-a-b) \sin x + (a-b) \cos x \} \end{aligned}$$

であるから、与えられた等式が恒等的に成り立つための必要十分条件は

$$\begin{cases} -a-b=2 \\ a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$$

とわかる。