

【1】

- (1) $\boxed{1}$ J $\boxed{2}$ E
- (2) $\boxed{3}$ H $\boxed{101}$ $\frac{21\sqrt{3}}{2}$
- (3) $\boxed{4}$ C $\boxed{5}$ J
- (4) $\boxed{6}$ B
- (5) $\boxed{7}$ G $\boxed{8}$ D

【解説】

(1)

①

1枚も1が含まれていない場合の確率を求めると

$$\frac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{6}$$

であるので、1と書かれたカードが少なくとも1枚含まれる確率は

$$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

である。

②

3枚のカードに書かれた数字の和が5になるのは、1を2枚と3を1枚ひくか、1を1枚と2を2枚ひいたときである。よって、求める確率は

$$\frac{{}_4C_2 \cdot {}_2C_1 + {}_4C_1 \cdot {}_3C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{5}$$

である。

(2)

①

正弦定理により

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

であるから、 $a=13k$ 、 $b=8k$ 、 $c=7k$ (ただし k は正の実数) とおける。よって余弦定理より

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(8k)^2 + (7k)^2 - (13k)^2}{2 \cdot 8k \cdot 7k} = -\frac{1}{2}$$

となる。

②

①より $A=120^\circ$ である。正弦定理より

$$\frac{13k}{\sin 120^\circ} = 13 \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

であるから、 $\triangle ABC$ の面積は

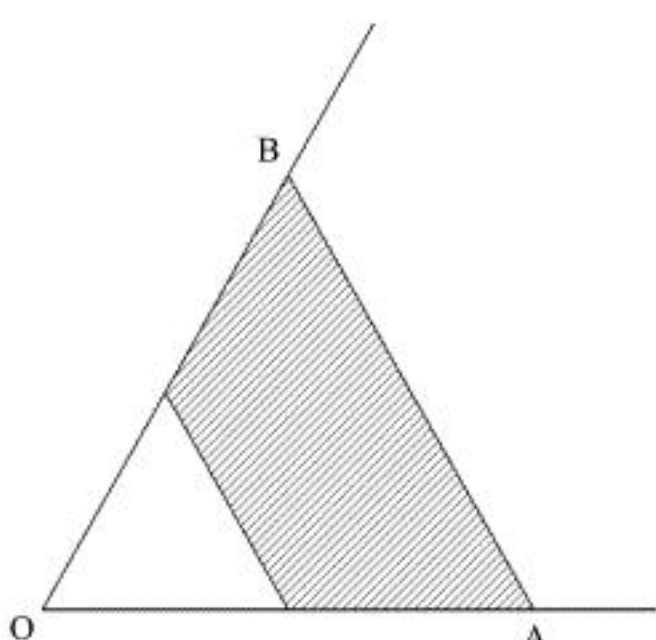
$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CA \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \sin 120^\circ = \frac{21\sqrt{3}}{2}$$

と求まる。

(3)

①

以下の斜線部が点Pの動く範囲である。



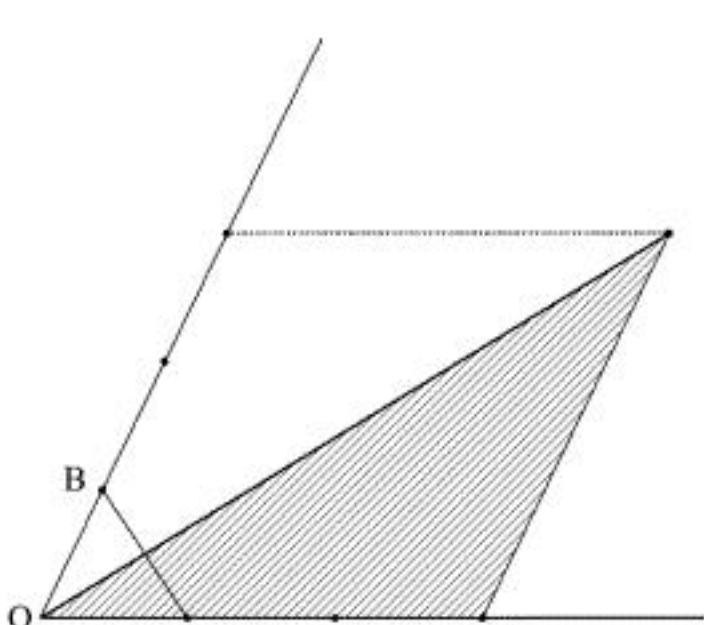
よって、求める面積は

$$1 \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right\} = \frac{3}{4}$$

である。

②

以下の斜線部が点Pの動く範囲である。



よって求める面積は

$$1 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 9$$

である。

(4)

与えられた方程式を整理していくと

$$81^{-x} - \frac{1}{2} \cdot 3^{-2x+2} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (9^{-x})^2 - \frac{9}{2}(9^{-x}) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(9^{-x})^2 - 9(9^{-x}) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \cdot 9^{-x} - 1)(9^{-x} - 4) = 0$$

となる。よって

$$9^{-x} = \frac{1}{2}, 4 \Leftrightarrow x = \log_9 2, \log_9 \frac{1}{4}$$

であるから、求める最大の x は $\log_9 2$ である。

(5)

題意より、星Aは1日あたり 1.5° 進み、星Bは1日あたり 1° 進むことがわかる。星Aが星Bより回転方向に現在よりさらに 90° 進んで $\angle AOB = 180^\circ$ になったとき、星Aと星Bの距離は最大になる。このようになるのは今から

$$90 \div (1.5 - 1) = 180 \text{ [日後]}$$

である。また、60日後では

$$90 + (1.5 - 1) \times 60 = 120$$

より、星Aが星Bより回転方向に 120° 進んだ位置にあることがわかる。よって、余弦定理から星Aと星Bの距離は

$$\sqrt{0.9^2 + 1.5^2 - 2 \times 0.9 \times 1.5 \times \cos 120^\circ} = 2.1 \text{ [億 km]}$$

である。

[II]

$$(1) \quad \boxed{9} \quad D \quad \boxed{10} \quad F$$

$$(2) \quad \boxed{11} \quad C \quad \boxed{12} \quad E \quad \boxed{102} \quad 40000$$

【解説】

(1) $m \geq 2$ のとき、第 $(m-1)$ 群の最後の項はもとの数列の

$$\sum_{k=1}^{m-1} 2k = m(m-1) \text{ [番目]}$$

の項であるから、第 m 群の最初の項は

$$m(m-1)+1 = m^2 - m + 1 \text{ [番目]}$$

の項である(これは $m=1$ のときにも成り立つ)。また、この項は

$$m \cdot \{2(m^2 - m + 1) - 1\} = 2m^3 - 2m^2 + m$$

と表すことができる。

(2) (1)より、第 10 群の最初の項は 1810、第 11 群の最初の項は 2431 であるから、初めて 2011 をこえる項は第 10 群に現れる。第 10 群は初項 1810、公差 20 の等差数列であり、

$$1810 + (11-1) \cdot 20 = 2010$$

$$1810 + (12-1) \cdot 20 = 2030$$

より、第 10 群の 12 番目の項が初めて 2011 をこえることがわかる。また、第 10 群のすべての項の和は

$$\frac{20}{2} \times \{2 \cdot 1810 + (20-1) \cdot 20\} = 40000$$

である。

【Ⅲ】

$$(1) \quad \boxed{13} \quad G$$

$$(2) \quad \boxed{14} \quad D$$

$$(3) \quad \boxed{15} \quad H \quad \boxed{16} \quad A$$

【解説】

(1)

C_1 と l の方程式を連立すると

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 2 &= ax + 2 \\ \Leftrightarrow x\{x - (a - 3)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0, a - 3 \end{aligned}$$

となるから、求める交点の x 座標は 0 と $a - 3$ である。

(2)

C_2 と l の方程式を連立すると

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x + 2 &= ax + 2 \\ \Leftrightarrow x\{x - (4 - a)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0, 4 - a \end{aligned}$$

となるから、放物線 C_2 と直線 l の交点の x 座標は 0 と $4 - a$ である。 C_1 と l で囲まれた部分の面積を S_1 、 C_2 と l で囲まれた部分の面積を S_2 とすると、 $a = 5$ のとき

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^2 \{5x + 2 - (x^2 + 3x + 2)\} dx \\ &= -\int_0^2 x(x - 2) dx \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2^3 \\ &= \frac{4}{3} \\ S_2 &= \int_{-1}^0 \{(-x^2 + 4x + 2) - (5x + 2)\} dx \\ &= -\int_{-1}^0 x(x + 1) dx \\ &= \frac{1}{6} \cdot 1^3 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

であるので

$$S = \frac{4}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{2}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned} S_1 &= \left| \int_0^{a-3} \{(ax + 2) - (x^2 + 3x + 2)\} dx \right| \\ &= \left| \int_0^{a-3} x(x - a + 3) dx \right| \\ &= \frac{1}{6} |a - 3|^3 \\ S_2 &= \left| \int_0^{4-a} \{(-x^2 + 4x + 2) - (ax + 2)\} dx \right| \\ &= \left| \int_0^{4-a} x(x - 4 + a) dx \right| \\ &= \frac{1}{6} |4 - a|^3 \end{aligned}$$

であるから、

$$S = \frac{1}{6} (|a - 3|^3 + |4 - a|^3)$$

と表わすことができる。

[1] $a < 3$ のとき

$$S = \frac{1}{6} \{(3 - a)^3 + (4 - a)^3\}$$

であるから S は単調減少である。

[2] $3 \leq a \leq 4$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6} \{(a - 3)^3 + (4 - a)^3\} \\ &= \frac{1}{6} (3a^2 - 21a + 37) \\ &= \frac{1}{2} \left(a - \frac{7}{2} \right)^2 + \frac{1}{24} \end{aligned}$$

であるから S は $a = \frac{7}{2}$ のとき最小値 $\frac{1}{24}$ をとる。

[3] $4 < a$ のとき

$$S = \frac{1}{6} \{(a - 3)^3 + (a - 4)^3\}$$

であるから S は単調増加である。

以上[1], [2], [3]より S は $a = \frac{7}{2}$ のとき最小値 $\frac{1}{24}$ をとる。