

[I]

(1)	ア	2	イ	9	ウ	5	エ	9						
(2)	オ	2	カ	6	キ	4	ク	1	ケ	3	コ	4	サ	5
(3)	シ	1	ス	6	セ	3	ソ	2	タ	5	チ	4		

【解説】

(1)

(a, b) の組は全部で $6 \times 6 = 36$ 通りであり、このうち $ab \geq 20$ となるのは、

$$(a, b) = (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)$$

の 8 通りである。よって $ab \geq 20$ となる確率は

$$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

となる。また、

$$(ab \text{ が } 3 \text{ で割り切れる}) \Leftrightarrow (a, b \text{ のうち少なくとも一方が } 3 \text{ の倍数})$$

なので、

$$(ab \text{ が } 3 \text{ で割り切れる確率}) = 1 - (3, 6 \text{ の目が出ない確率}) = 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned} \cos 105^\circ &= \cos(60^\circ + 45^\circ) \\ &= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

である。△ABCにおいて余弦定理より、

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos C} \\ &= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}} \\ &= \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \\ &= 1 + \sqrt{3} \\ \cos A &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2^2}{2 \cdot (1 + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \therefore \angle A &= 45^\circ \end{aligned}$$

となる。

(3)

$$\begin{aligned} &(\log_{a^2} b + \log_b a^3)(\log_{a^3} b + \log_{b^2} a) \\ &= \left(\frac{\log_a b}{\log_a a^2} + \log_b a^3\right) \left(\frac{\log_a b}{\log_a a^3} + \frac{\log_b a}{\log_b b^2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \log_a b + 3 \log_b a\right) \left(\frac{1}{3} \log_a b + \frac{1}{2} \log_b a\right) \\ &= \frac{1}{6} (\log_a b)^2 + \frac{5}{4} \log_a b \cdot \log_b a + \frac{3}{2} (\log_b a)^2 \\ &= \frac{1}{6} (\log_a b)^2 + \frac{3}{2} (\log_b a)^2 + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

となる。

[Ⅱ]

(1)	ア	2	イ	9	ウ	6	エ	4	オ	1	カ	3	キ	6
(2)	ク	1	ケ	2	コ	7	サ	9	シ	6	ス	1	セ	1
	ソ	1	タ	2	チ	4	ツ	5	テ	1	ト	2		

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{\{(2s+3)-(s+3)\}^2 + \{(1-2s)-(2s-1)\}^2 + \{(s-1)-(2s+1)\}^2} \\ &= \sqrt{2(9s^2 - 6s + 4)} \end{aligned}$$

となる。 $9s^2 - 6s + 4 = 9\left(s - \frac{1}{3}\right)^2 + 3$ なので、 PQ は $s = \frac{1}{3}$ のとき最小値 $\sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$ をとる。

(2)

$$k = \cos \theta = \frac{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}}{|\overline{OP}| \cdot |\overline{OQ}|} \text{ であり,}$$

$$|\overline{OP}| = \sqrt{(s+3)^2 + (2s-1)^2 + (2s+1)^2} = \sqrt{9s^2 + 6s + 11}$$

$$|\overline{OQ}| = \sqrt{(2s+3)^2 + (1-2s)^2 + (s-1)^2} = \sqrt{9s^2 + 6s + 11}$$

$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = (s+3)(2s+3) + (2s-1)(1-2s) + (2s+1)(s-1) = 12s + 7$$

であるので,

$$k = \frac{12s+7}{\left(\sqrt{9s^2+6s+11}\right)^2} = \frac{12s+7}{9s^2+6s+11}$$

となる。 $k \neq 0$ のとき、これをみたす実数 s が存在するための条件は、 s についての2次方程式

$$k = \frac{12s+7}{9s^2+6s+11} \Leftrightarrow 9ks^2 + (6k-12)s + 11k-7 = 0$$

が実数解をもつことなので、判別式を D とすると、

$$\frac{D}{4} = (3k-6)^2 - 9k \cdot (11k-7) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 10k^2 - 3k - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (2k+1)(5k-4) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{4}{5}$$

となる。 $\cos \theta = \frac{4}{5}$ となるのは

$$\frac{12s+7}{9s^2+6s+11} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 36s^2 - 36s + 9 = 0 \Leftrightarrow 9(2s-1)^2 = 0$$

$$\therefore s = \frac{1}{2}$$

のときである。

[Ⅲ]

- (1) ア 2 イ 4 ウ 4 エ 2
 (2) オ 2 カ 9 キ 1 ク 2 ケ 1 コ 2 サ 4
 シ 4
 (3) ス 2 セ 3 ソ 8 タ 2 チ 2 ツ 4 テ 2
 ト 7

【解説】

(1)

$$\begin{cases} C_1:y=x^2 \\ C_2:y=-x^2-8x-8 \end{cases}$$

の連立より、2曲線の共有点は $(-2, 4)$ となる。

$$\begin{cases} C_1:y=x^2 \\ C_3:y=-x^2+ax+b \end{cases}$$

は接するので、

$$x^2=-x^2+ax+b\Leftrightarrow 2x^2-ax-b=0$$

は重解 $x=\frac{-(-a)}{2\cdot 2}=\frac{a}{4}$ をもつ。よって $t=\frac{a}{4}\Leftrightarrow a=4t$ である。このとき、

$$t^2=-t^2+4t\cdot t+b\Leftrightarrow b=-2t^2$$
となる。

(2)

$C_2:y'=-2x-8$ より、 C_2 の $x=\alpha$ における接線は、

$$y-(-\alpha^2-8\alpha-8)=(-2\alpha-8)(x-\alpha)\Leftrightarrow y=-2(\alpha+4)x+\alpha^2-8\qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となる。 $C_3:y'=-2x+a$ より、 C_3 の $x=\beta$ における接線は、

$$y-(-\beta^2+a\beta+b)=(-2\beta+a)(x-\beta)\Leftrightarrow y=-2(\beta-2t)x+\beta^2-2t^2\qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。①と②が等しいので、

$$\begin{cases} -2(\alpha+4)=-2(\beta-2t) \\ \alpha^2-8=\beta^2-2t^2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \beta-\alpha=2t+4 \\ \beta^2-\alpha^2=2t^2-8 \end{cases}$$

となる。よって

$$\beta+\alpha=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}=\frac{2t^2-8}{2t+4}=t-2$$

となる。

$$\begin{cases} \beta-\alpha=2t+4 \\ \beta+\alpha=t-2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-\frac{1}{2}t-3 \\ \beta=\frac{3}{2}t+1 \end{cases}$$

であり、これと①、②より、

$$\ell:y=(t-2)x+\frac{t^2+12t+4}{4}$$

となる。

(3)

$-x^2+4tx-2t^2=0$ をみたす x を x_1, x_2 ($x_1<x_2$) とすると、解と係数の関係より

$$x_1+x_2=4t, x_1x_2=2t^2$$

となる。よって

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{x_1}^{x_2} (-x^2+4tx-2t^2) dx \\ &= -\int_{x_1}^{x_2} (x-x_1)(x-x_2) dx \\ &= \frac{1}{6}(x_2-x_1)^3 \\ &= \frac{1}{6}\{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{6}\{(4t)^2-4\cdot 2t^2\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot 8t^3 \end{aligned}$$

となる。また、

$$x^2=(t-2)x+\frac{t^2+12t+4}{4}\Leftrightarrow -x^2+(t-2)x+\frac{t^2+12t+4}{4}=0$$

をみたす x を x_3, x_4 ($x_3<x_4$) とすると、解と係数の関係より

$$x_3+x_4=t-2, x_3x_4=-\frac{t^2+12t+4}{4}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{x_3}^{x_4} \left(-x^2+(t-2)x+\frac{t^2+12t+4}{4}\right) dx \\ &= -\int_{x_3}^{x_4} (x-x_3)(x-x_4) dx \\ &= \frac{1}{6}(x_4-x_3)^3 \\ &= \frac{1}{6}\{(x_3+x_4)^2-4x_3x_4\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{6}\left\{(t-2)^2-4\cdot \left(-\frac{t^2+12t+4}{4}\right)\right\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot (t+2)^3 \end{aligned}$$

となる。ここで

$$S_1-S_2=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot 8t^3-\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot (t+2)^3=\frac{\sqrt{2}}{3}\{8t^3-(t+2)^3\}=f(t)$$

とおくと

$$f'(t)=\frac{\sqrt{2}}{3}\{24t^2-3(t+2)^2\}=\sqrt{2}(7t^2-4t-4)$$

である。よって、 $f'(t)=0$ となるのは

$$t=\frac{2+4\sqrt{2}}{7}(\because t>0)$$

である。増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{2+4\sqrt{2}}{7}$	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		$\searrow$	最小値	$\nearrow$

よって、 S_1-S_2 が最小となるのは $t=\frac{2+4\sqrt{2}}{7}$ のときである。