

【I】

(1)

ア

D

イ

I

【解説】

$$\begin{aligned}(\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}\sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{2} \left\{ (\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 1 \right\} \\ &= -\frac{3}{8}\end{aligned}$$

となる。

(2)

ア

B

イ

D

ウ

G

【解説】

$|5x-41| < 2x+1$ のとき $2x+1 > 0$ なので,

$$\begin{aligned}|5x-41| &< 2x+1 \\ \Leftrightarrow -2x-1 &< 5x-41 < 2x+1 \\ \Leftrightarrow \frac{40}{7} &< x < 14\end{aligned}$$

である。 x は整数であるから, その最大値は 13, 最小値は 6 となる。

(3)

ア

I

イ

B

ウ

A

【解説】

$(x-3y+z)^6$ の展開式における $x^2y^2z^2$ の係数は

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \times 1^2 \cdot (-3)^2 \cdot 1^2 = 810$$

である。

(4)

ア

B

イ

E

【解説】

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \\ &= \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2} - \frac{\vec{c}}{2} \\ &= \frac{\vec{b} - \vec{c} + \vec{d}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} &= \vec{b} + \vec{d} + (\vec{b} - \vec{c}) + (\vec{d} - \vec{c}) \\ &= 2(\vec{b} - \vec{c} + \vec{d}) \\ &= 4\overrightarrow{MN}\end{aligned}$$

である。

【Ⅱ】

ア	B	イ	G	ウ	D	エ	D
オ	D	カ	B	キ	I	ク	E

【解説】

(1)

直線①と放物線②の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} ax &= -x(x-3) \\ \Leftrightarrow x\{x-(3-a)\} &= 0 \end{aligned}$$

より、 $x=0, 3-a$ であるから、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{3-a} \{-x(x-3)-ax\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3-a}{2}x^2 \right]_0^{3-a} \\ &= \frac{1}{6}(3-a)^3 \end{aligned}$$

となる。

(2)

放物線②と x 軸で囲まれた面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \{-x(x-3)\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}(3-a)^3 : \frac{9}{2} &= 2:(2+1) \\ \Leftrightarrow (3-a)^3 &= 18 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $3-a>0$ であるから、

$$\begin{aligned} 3-a &= \sqrt[3]{18} \\ \therefore a &= 3-\sqrt[3]{18} \end{aligned}$$

を得る。

(3)

このとき、直線①と放物線②の交点の x 座標は

$$x=0, \frac{8}{3}$$

であるから、

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{\frac{8}{3}}^b \left[\frac{1}{3}x - \{-x(x-3)\} \right] dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 \right]_{\frac{8}{3}}^b \\ &= \frac{1}{3}b^3 - \frac{4}{3}b^2 + \frac{256}{81} \end{aligned}$$

と表せる。また、

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{6} \left(3 - \frac{1}{3} \right)^3 \\ &= \frac{256}{81} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}b^3 - \frac{4}{3}b^2 + \frac{256}{81} &= \frac{256}{81} \\ \Leftrightarrow b^2(b-4) &= 0 \end{aligned}$$

となり、 $b>3$ から、

$$b=4$$

と求まる。

〔Ⅲ〕

(1)

$y = x^2$ より $y' = 2x$ であるから

$$\begin{cases} l_1: y - s^2 = 2s(x - s) \\ l_2: y - t^2 = 2t(x - t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l_1: y = 2sx - s^2 \\ l_2: y = 2tx - t^2 \end{cases}$$

となる。 $s \neq 0, t \neq 0$ より、 P_0 の座標は $\left(\frac{s}{2}, 0\right)$ 、 Q_0 の座標は $\left(\frac{t}{2}, 0\right)$ となる。

$$(\text{答}) \ P_0 \text{ の座標は } \left(\frac{s}{2}, 0\right), \ Q_0 \text{ の座標は } \left(\frac{t}{2}, 0\right)$$

(2)

l_1 と l_2 の交点 R の x 座標は

$$\begin{aligned} 2sx - s^2 &= 2tx - t^2 \\ \Leftrightarrow 2(s - t)x &= s^2 - t^2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{s + t}{2} \ (\because s - t \neq 0) \end{aligned}$$

であり、 y 座標は

$$\begin{aligned} y &= 2s \cdot \frac{s + t}{2} - s^2 \\ &= st \end{aligned}$$

である。よって、求める座標は $R\left(\frac{s + t}{2}, st\right)$ である。

$$(\text{答}) \ R\left(\frac{s + t}{2}, st\right)$$

(3)

円の方程式①が P_0 、 Q_0 を通ることから、

$$\begin{cases} \left(\frac{s}{2} - a\right)^2 + b^2 = c^2 \\ \left(\frac{t}{2} - a\right)^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$$

$$\therefore \left(\frac{s}{2} - a\right)^2 = \left(\frac{t}{2} - a\right)^2$$

を満たす。ここで、

$$s \neq t \Leftrightarrow \frac{s}{2} - a \neq \frac{t}{2} - a$$

を用いると

$$\begin{aligned} \frac{s}{2} - a &= -\left(\frac{t}{2} - a\right) \\ \Leftrightarrow s + t &= 4a \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \ 4a$$

(4)

(3)より、 $R(2a, st)$ である。円の方程式①が P_0 、 R を通ることと、②と $s \neq 0$ から、

$$\begin{cases} \left(\frac{s}{2} - a\right)^2 + b^2 = c^2 \\ (2a - a)^2 + (st - b)^2 = c^2 \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{4} - as &= s^2t^2 - 2bst \\ \Leftrightarrow st^2 - 2bt - \frac{s}{4} + a &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。また、同様にして

$$s^2t - 2bs - \frac{t}{4} + a = 0$$

が得られる。上 2 式の辺々を足し合わせると、

$$\begin{aligned} st(s + t) - 2b(s + t) - \frac{s + t}{4} + 2a &= 0 \\ \Leftrightarrow 4ast - 8ab - a + 2a &= 0 \end{aligned}$$

となるから、 $a \neq 0$ のとき、

$$st = 2b - \frac{1}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \ st^2 - 2bt - \frac{s}{4} + a = 0, \ s^2t - 2bs - \frac{t}{4} + a = 0, \ st = 2b - \frac{1}{4}$$

(5)

円の方程式①が $R\left(2a, 2b - \frac{1}{4}\right)$ を通ることから

$$\begin{aligned} (2a - a)^2 + \left(2b - \frac{1}{4} - b\right)^2 &= c^2 \\ \Leftrightarrow a^2 + \left(b - \frac{1}{4}\right)^2 &= c^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。これは、①が定点 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ を通ることを意味する。

$$(\text{答}) \ a^2 + \left(b - \frac{1}{4}\right)^2 = c^2, \ \left(0, \frac{1}{4}\right)$$