

問 I

【解答】

(1)

ア 5 イ 1 ウ 2

(2)

エ 5 オ 5 カ 2 キ 1 ク 6

【解説】

(1)

サイコロの目の出方は全部で 6^2 通りで、すべて同様に確からしい。1回目のサイコロの目が2回目のサイコロの目より大きくなるような場合の数は、1～6の6つの数字から2つ選ぶ組み合わせの数に等しい（2つの数字のうち大きい方を1回目のサイコロの目とすればよい）から、

$${}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15 \text{通り}$$

である。よって、求める確率は

$$\frac{15}{6^2} = \frac{5}{12}$$

である。

(2)

サイコロの目の出方は全部で 6^3 通りで、すべて同様に確からしい。2回目の目と3回目の目が等しいか、異なるかどうかで場合分けして、これらの数よりも1回目のサイコロの目が大きくなる場合の数を考える。

[1] 2回目と3回目のサイコロの目が等しいとき

1～6の6つの数字から2つを選び、大きい方を1回目の目とし、小さい方を2, 3回目の目とすればよい。よって、このような場合の数は、6つの数字から2つを選ぶ組み合わせの数に等しく、

$${}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15 \text{通り}$$

である。

[2] 2回目と3回目のサイコロの目が異なるとき

1～6の6つの数字から3つを選び、最も大きい数を1回目の目とすればよい。最も小さい数が出るのが2回目に出るか3回目に出るかの2通りがあるので、このような場合の数は

$$2 \times {}_6C_3 = 2 \times \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 40 \text{通り}$$

である。

以上[1], [2]より、求める確率は、

$$\frac{15+40}{6^3} = \frac{55}{216}$$

となる。

問Ⅱ

【解答】

(1)

ケ 3 コ 8 サ 1 シ 9

(2)

ス 5 セ 6 ソ 7 タ 1 チ 8

【解説】

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \Leftrightarrow x^3 - 48x &= 9x + k \\ \Leftrightarrow x^3 - 57x &= k \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} y &= f(x) \text{ と } y = g(x) \text{ のグラフが 3 つの異なる交点を持つ} \\ \Leftrightarrow x \text{ の方程式 } f(x) &= g(x) \text{ が 3 つの異なる実数解を持つ} \\ \Leftrightarrow y &= x^3 - 57x \text{ と } y = k \text{ のグラフが 3 つの異なる交点を持つ} \end{aligned}$$

と読みかえられる。 $h(x) = x^3 - 57x$ とおくと、

$$h'(x) = 3x^2 - 57 = 3(x - \sqrt{19})(x + \sqrt{19})$$

となるから、 $h(x)$ の増減は下表のようになる。

x	...	$-\sqrt{19}$	...	$\sqrt{19}$	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗	$38\sqrt{19}$	↘	$-38\sqrt{19}$	↗

よって、 $|k| < 38\sqrt{19}$ のとき、 $y = x^3 - 57x$ と $y = k$ のグラフが 3 つの異なる交点を持つ。したがって、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフが 3 つの異なる交点を持つ必要十分条件は

$$|k| < 38\sqrt{19}$$

である。

(2)

$f(x) = x^3 - 48x$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 48 = 3(x - 4)(x + 4)$$

であるから、 $f(x)$ の増減は下表のようになる。

x	...	-4	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	128	↘	-128	↗

上表より、 $y = f(x)$ は $x = -4$ のとき極大値 128 をとるので、

$$\begin{aligned} a &= -4 \\ b &= 128 (= 2^7) \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} c &= g(a) \\ &= g(-4) \\ &= k - 36 \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \log_{10} b - 7 \log_{10} c + 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_{10} 2^7 - 7 \log_{10} (k - 36) + 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_{10} 2 + \log_{10} 10 &= \log_{10} (k - 36) \\ \Leftrightarrow 2 \cdot 10 &= k - 36 \\ \Leftrightarrow k &= 56 \end{aligned}$$

となり、 $\log_{10} b - 7 \log_{10} c + 7 = 0$ が成り立つのは $k = 56$ のときだとわかる。このとき、(1)より $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は 3 つの異なる交点を持つ。

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \Leftrightarrow x^3 - 48x &= 9x + 56 \\ \Leftrightarrow x^3 - 57x - 56 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 7)(x + 1)(x - 8) &= 0 \end{aligned}$$

より、それら交点の x 座標の値は、小さい順に並べると、

$$-7, -1, 8$$

である。

問Ⅲ

【解答】

(1)

ツ 1 テ 5 ト 3

(2)

ナ 1 ニ 4 ノ 6 ネ 5 ノ 7

ハ 6 ヒ 5

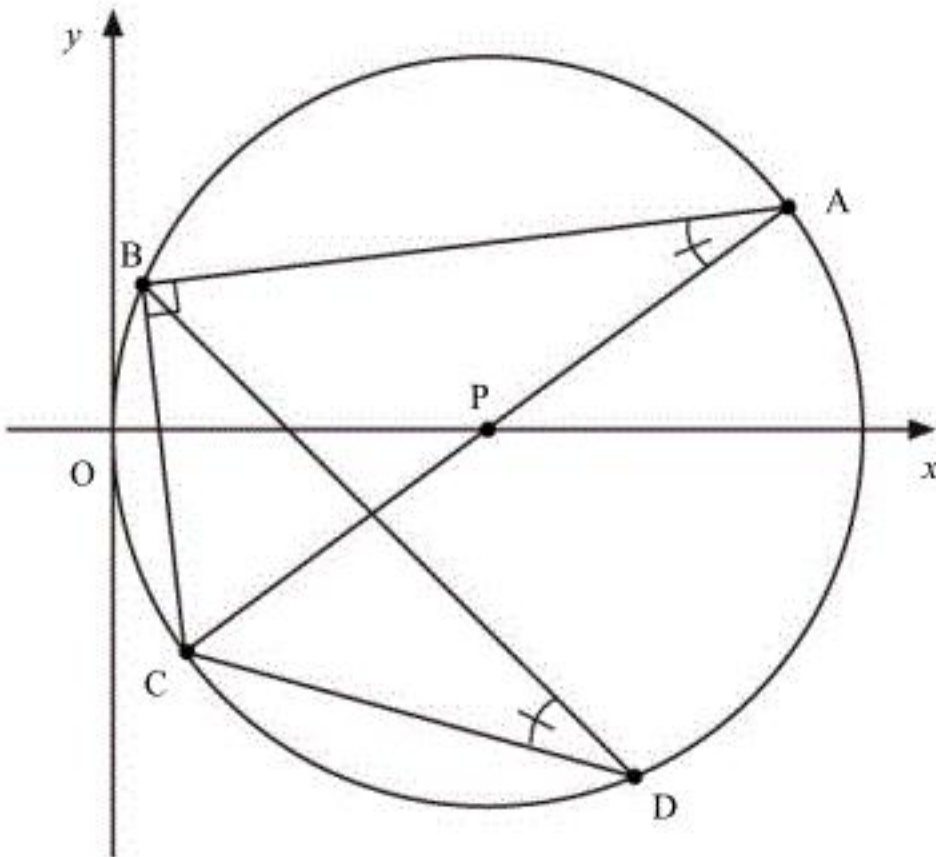
(3)

フ 1 ヘ 8 ホ 1 マ 3 ミ 1

ム 2 メ 1 モ 3 ヤ 1 ヨ 2

ヨ 0

【解説】



(1)

直径に対する円周角は直角となるので、 $\angle ABC = 90^\circ$ のとき、線分 AC は円 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ の直径である。よって、点 $C(\alpha, \beta)$ は円の中心 $P(1, 0)$ に関して点 A と対称な位置にあることになるので、

$$\frac{\alpha + \frac{9}{5}}{2} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\frac{\beta + \frac{3}{5}}{2} = 0 \Leftrightarrow \beta = -\frac{3}{5}$$

となる。したがって、点 C の座標は

$$\left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

である。

(2)

$A\left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right), B\left(\frac{1}{13}, \frac{5}{13}\right)$ より、線分 AB の長さは

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{\left(\frac{9}{5} - \frac{1}{13}\right)^2 + \left(\frac{3}{5} - \frac{5}{13}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{12740}{65^2}} \\ &= \frac{14\sqrt{65}}{65} \end{aligned}$$

である。また、弦 BC に対する円周角であることから $\angle BDC = \angle BAC$ である。CA は円の直径

なので長さは 2 であり、 $\angle ABC = 90^\circ$ より $\cos \angle BAC = \frac{AB}{CA}$ であることから、

$$\begin{aligned} \cos \angle BDC &= \cos \angle BAC \\ &= \frac{AB}{CA} \\ &= \frac{14\sqrt{65}}{65} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{7\sqrt{65}}{65} \end{aligned}$$

となる。

(3)

$\triangle ACD = \frac{63}{65}$ 、 $AC = 2$ より、点 D と直線 AC の距離を h とすると、

$$\begin{aligned} \frac{63}{65} &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot h \\ \therefore h &= \frac{63}{65} \end{aligned}$$

である。直線 AC の方程式は

$$\begin{aligned} y - \frac{3}{5} &= \frac{-\frac{3}{5} - \frac{3}{5}}{\frac{1}{5} - \frac{9}{5}} \left(x - \frac{9}{5}\right) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow 3x - 4y - 3 &= 0 \end{aligned}$$

であるから、点と直線の距離に関する公式により、

$$\begin{aligned} \frac{|3\gamma - 4\delta - 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} &= h \left(= \frac{63}{65}\right) \\ \Leftrightarrow |3\gamma - 4\delta - 3| &= \frac{63}{65} \cdot 5 \end{aligned}$$

が成り立つが、点 D は直線 AC に関して原点 O と反対側にある（同じ側にあると $\delta < -\frac{4}{5}$ とならない）ため絶対値記号の中身は正となり

$$\begin{aligned} 3\gamma - 4\delta - 3 &= \frac{63}{13} \\ \Leftrightarrow \gamma &= \frac{4}{3}\delta + \frac{34}{13} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と書ける。また、点 D は円 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 上にあることから、

$$(\gamma - 1)^2 + \delta^2 = 1$$

が成り立つので、これに①を代入すると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{3}\delta + \frac{34}{13} - 1\right)^2 + \delta^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{25}{9}\delta^2 + \frac{56}{13}\delta + \frac{272}{169} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\delta + \frac{12}{13}\right)\left(\delta - \frac{204}{325}\right) &= 0 \\ \therefore \delta &= -\frac{12}{13} \quad \left(\because \delta < -\frac{4}{5}\right) \end{aligned}$$

が得られる。よって、

$$\gamma = \frac{4}{3}\left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{34}{13} = \frac{18}{13}$$

であるから、求める点 D の座標は

$$\left(\frac{18}{13}, -\frac{12}{13}\right)$$

となる。

点 B の座標は $\left(\frac{1}{13}, \frac{5}{13}\right)$ なので、

$$\begin{aligned} BD &= \sqrt{\left(\frac{18}{13} - \frac{1}{13}\right)^2 + \left(-\frac{12}{13} - \frac{5}{13}\right)^2} \\ &= \frac{17}{13}\sqrt{2} \end{aligned}$$

であり、また

$$PB = PD = 1 \quad (\text{半径})$$

なので、 $\triangle BPD$ に余弦定理を適用して、

$$\begin{aligned} \cos \angle BPD &= \frac{PB^2 + PD^2 - BD^2}{2PB \cdot PD} \\ &= \frac{1^2 + 1^2 - \left(\frac{17}{13}\sqrt{2}\right)^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} \\ &= -\frac{120}{169} \end{aligned}$$

問Ⅳ

【解答】

(1)

ラ 2	リ 2	ル 0	レ 7	ロ 1
ワ 5	ヲ 6	ン 5		

(2)

l 角形 ($3 \leq l \leq n$) をつくるには, n 個の点から l 個を選ぶ組み合わせを考えればよいので, そのとり方は ${}_nC_l$ 通りである。 l を $3 \leq l \leq n$ で動かすと求める個数

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{l=3}^n {}_nC_l \\ &= \sum_{k=1}^n {}_nC_k - {}_nC_0 - {}_nC_1 - {}_nC_2 \\ &= 2^n - 1 - n - \frac{n(n-1)}{2} \\ &= 2^n - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - 1 \end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad S(n) = 2^n - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - 1$$

【解説】

(1)

円周上に異なる m 個の点があるとき, このうち 3 個の点を頂点としてできる三角形の数 $f(m)$ は, m 個の点から 3 個の点を選ぶ組み合わせの数に等しい。 よって

$$f(m) = {}_mC_3 = \frac{1}{6} m(m-1)(m-2)$$

であり, 特に $m=12$ のとき,

$$f(12) = \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 220$$

である。 また,

$$\begin{aligned} & f(3) + f(4) + \cdots + f(11) + f(12) \\ &= \sum_{m=3}^{12} \frac{1}{6} m(m-1)(m-2) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{m=3}^{12} (m^3 - 3m^2 + 2m) \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \sum_{k=1}^{12} (k^3 - 3k^2 + 2k) - \sum_{k=1}^2 (k^3 - 3k^2 + 2k) \right\} \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 13 \right)^2 - 3 \left(\frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 13 \cdot 25 \right) + 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 13 \right) - (2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2) - (1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1) \right\} \\ &= 715 \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f(3)} + \frac{1}{f(4)} + \cdots + \frac{1}{f(11)} + \frac{1}{f(12)} \\ &= \sum_{m=3}^{12} \frac{6}{m(m-1)(m-2)} \\ &= 3 \sum_{m=3}^{12} \left(\frac{1}{m} - \frac{2}{m-1} + \frac{1}{m-2} \right) \\ &= 3 \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{2} + \frac{1}{1} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{12} - \frac{2}{11} + \frac{1}{10} \right) \right\} \\ &= 3 \left(-\frac{2}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} - \frac{2}{11} \right) \\ &= \frac{65}{44} \end{aligned}$$

である。